учитель будущего

Методика решения задач на проценты, смеси, сплавы

Кузнецова С.В.
заместитель директор, учитель математики
МБОУ «Гимназия № 2 «Квантор».

Типология задач и основные этапы математического моделирования.

Задачи на движение

по прямой (навстречу и вдогонку)

по замкнутой трассе

по воде

на среднюю скорость

протяженных тел

Задачи на производительность

задачи на работу

задачи на бассейны и трубы

Задачи на проценты, концентрацию, части и доли

Задачи на проценты и доли

Задачи на концентрацию, смеси и сплавы

Арифметическая прогрессия

Геометрическая прогрессия

Алгоритм решения текстовых задач
учитель будущего

Три этапа математического моделирования

1. Составление математической модели:

Например, ввод переменных, т.е. обозначение буквами x, y, z,... величины, которые требуется найти по условию задачи или составление таблицы, схемы для описания арифметического решения. Перевод условий задачи на язык математических соотношений, т.е. составление уравнений, неравенств, введение ограничения.

2. Работа с математической моделью:

Решение уравнений или неравенств, выполнение арифметических действий: метод полного перебора

3. Ответ на вопрос задачи:

Проверка полученных решений на выполнение условий задачи.

Основные подходы к решению задач на проценты и доли, на концентрацию, смеси и сплавы

Основные типы задач на доли и проценты:

- *нахождение данной доли числа;*
- *нахождение числа по заданной его доли;*
- *нахождение процентного отношения двух чисел;*
- *нахождение наращенного капитала (сложные проценты) при заданной процентной ставке (т. е. процент прироста капитала);*
- *нахождение времени, в течение которого капитал возрастает*

Задачи на части *- основным понятием является часть числа. Если задана величина а, то ее k-я часть равна $\frac{k}{a}$, где $k > 0$.*

Основные подходы к решению задач на проценты и доли, на концентрацию, смеси и сплавы

Задачи на проценты:

При решении задач принимают такие допущения:

- процент величины - одна сотая часть этой величины;
- если число ***a*** составляет ***p%*** от числа ***b***, то эти числа связаны равенством 100·a=p·b или

$$\frac{b}{100}=\frac{a}{p}$$

- если число ***a*** увеличено на ***p%***, то оно увеличено в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз, то получится число

$$a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Основные подходы к решению задач на проценты и доли, на концентрацию, смеси и сплавы

Задачи на проценты:

- если уменьшено на ***q%***, 0≤q≤100, то оно уменьшено в $(1-\frac{q}{100})$ раз, то получаются число a· $(1-\frac{q}{100})$

- При многократном начислении простых процентов начисление делается по отношению к исходной сумме и представляет собой каждый раз одну и ту же величину:

$$S = a\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$$

где *a* - исходная сумма, *S* - наращенная сумма, *p* - процентная ставка, выраженная в долях, *n* - число периодов начисления.

Основные подходы к решению задач на проценты и доли, на концентрацию, смеси и сплавы

учитель будущего

Задачи на проценты:

- При многократном начислении сложных процентов начисление каждый раз делается по отношению к сумме с уже начисленными ранее процентами:

$$S = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$$

где *a* - исходная сумма, *S* - наращенная сумма, *p* - процентная ставка, выраженная в долях, *n* - число периодов начисления.

учитель будущего

Примеры решения задач на проценты и доли.

При решении задач на проценты надо помнить, что процент - это просто одна сотая часть числа. Если число а увеличить на 5%, 17%, то получим соответственно

$$(1+\frac{5}{100})a = 1{,}05a$$
$$(1+\frac{17}{100})a = 1{,}17a$$

Если число а уменьшить на 7%, 19%, то получим соответственно

$$(1-\frac{7}{100})a = 0{,}93a$$
$$(1-\frac{19}{100})a = 0{,}81a$$

учитель будущего

Примеры решения задач на проценты и доли.

При решении задач на проценты надо помнить, что процент это просто одна сотая часть числа. Если число а увеличить на 5%, 17%, то получим соответственно

$$(1+\frac{5}{100})a = 1{,}05a$$

$$(1+\frac{17}{100})a = 1{,}17a$$

Если число а уменьшить на 7%, 19%, то получим соответственно

$$(1-\frac{7}{100})a = 0{,}93a$$

$$(1-\frac{19}{100})a = 0{,}81a$$

учитель будущего

Примеры решения задач на проценты и доли.

Замечание!!! *Последовательное увеличение на некоторое число процентов, а потом уменьшение на это же число процентов не приводит к начальному значению, так как уменьшение на число процентов проходит уже над другим числом. Можно сначала уменьшить, а затем увеличить на некоторое число процентов, но в результате получим число процентов меньше, чем было первоначально.*

Задача № 1: *Число А увеличилось на 20%, а затем полученное число уменьшили на 25%. Определите как в итоге, изменилось исходное число.*

Решение: 1) $A_1=(100\%+20\%)A=120\%A=1{,}2A$

2) $A_2=(100\%-25\%)A_1=75\%A_1=0{,}75.1{,}2A=0{,}9A=90\%A$

3) $A_2-A=90\%A-100\%A=-10\%A$

Ответ: уменьшилось на 10%.

учитель будущего

Примеры решения задач на проценты и доли.

Задача № 2: *В четверг акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а пятницу подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 36 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?*

Решение:

Четверг – подорожали на x % $1 + 0{,}01x$

Пятница – на столько же подешевели $1 + 0{,}01x – (1+0{,}01x)\cdot 0{,}01x$

$1 + 0{,}01x – (1+0{,}01x)\cdot 0{,}01x = 1 – 0{,}36$

$1 + 0{,}01x – 0{,}01x+0{,}0001x^2 = 0{,}64$

$0{,}0001x^2 = 0{,}36$

$x^2= 3600$

$x_1 = 60$

$x_2 = - 60$ не удов. условию задачи

Ответ: 60 %.

Задачи на концентрацию, смеси и сплавы.

При решении задач используются следующие допущения:

- *все полученные сплавы, растворы, смеси считаются однородными;*
- *при соединении растворов и сплавов не учитываются химические взаимодействия их отдельных компонентов;*
- *считают, что литр как мера вместимости сосуда равен литру как меры количества жидкости;*
- *если два сплава (раствора) соединяют в один <новый> сплав (раствор), то выполняются равенства: $V=V_1+V_2$ - сохраняется объем и $m=m_1+m_2$ - сохраняется масса.*
- *если первый сплав состоит из нескольких компонентов, например из A, B, C, а второй - из компонентов B, C, D, то <новый> сплав, полученный при соединении этих двух сплавов, будет содержать компоненты A, B, C, D, причем массы этих компонентов в <новом> сплаве равны сумме масс каждого из компонентов, входящих в первый и второй сплавы.*

Задачи на концентрацию, смеси и сплавы.

учитель будущего

Замечание!!!

Объемная (массовая) концентрация есть число, показывающее, какую долю всего объема (массы) составляет данный компонент.

Если сплав (раствор, смесь) имеет массу $\boldsymbol{m}$ и состоит из веществ ***A, B, C,*** массы которых соответственно m_A, m_B, m_C, то величины $\frac{m_A}{m}, \frac{m_B}{m}, \frac{m_c}{m}$ называют ***концентрацией веществ A, B, C***, а величины

$\frac{m_A}{m} \cdot 100\%, \frac{m_B}{m} \cdot 100\%, \frac{m_c}{m} \cdot 100\%$- ***процентным содержанием*** веществ.

При этом справедливо равенство $\frac{m_A}{m} + \frac{m_B}{m} + \frac{m_C}{m} = 1.$

Алгоритм решения задачи на сплавы, растворы и смеси:

учитель будущего

Замечание!!!

При решении задач на смеси часто путают проценты и доли, раствор и растворенное вещество. Необходимо помнить, что массовая доля находится делением значения процентной концентрации на 100%, а масса растворенного вещества К - m_k - равна произведению массы раствора Р - m_p - на массовую долю -ω .

$$m_k = m_p \cdot \omega$$

- *Изучить условия задачи. Выбрать неизвестные величины (их обозначают буквами х, у и т.д.), относительно которых составить пропорции, этим, мы создаем математическую модель ситуации, описанной в условии задачи.*
- *Используя условия задачи, определить все взаимосвязи между данными величинами.*
- *Составить математическую модель задачи и решить ее.*
- *Изучить полученное решение, провести критический анализ результата.*

Задачи на концентрацию, смеси и сплавы.

учитель будущего

Задача 1. *Определите в каких пропорциях нужно смешать* ***a%****-й и* ***b%****-й растворы кислоты* **(*a* < b)**, *чтобы получить* ***c%****-й раствор.*

Решение. Возьмем **x** грамм **a%**-го раствора и **y** грамм **b%**-го раствора кислоты.

Концентрация раствора в %	Масса раствора в граммах	Масса кислоты в граммах
a	x	0,01xa
b	y	0,01yb
c	x + y	0,01(x + y)c

Составим и решим уравнение:

0,01ax + 0,01by = 0,01c(x + y) ,

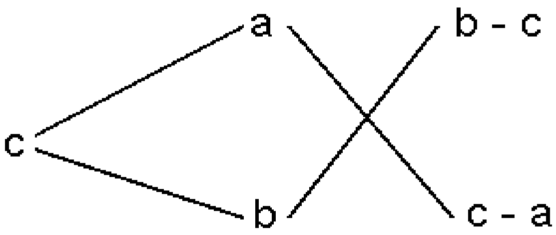
(b - c)y = (c - a)x

x : y = (b - c) : (c - a). Ответ: $\frac{b-c}{c-a}$

Задачи на концентрацию, смеси и сплавы.

учитель будущего

Замечание!!! *Можно воспользоваться диагональной схемой или «конвертом Пирсона»:*



а		с - в
	с	
в		а – с

Сущность этого приема состоит в том, что по диагоналям из большей величины массовой доли растворенного вещества (в %) вычитают меньшую:

где а – большая массовая доля I раствора,
в - меньшая массовая доля II раствора,
с - искомая массовая доля (%) растворенного вещества в растворе.

Задача 2. Имеется два сплава золота и серебра. В одном количества этих металлов находится в отношении 2:3, а в другом – 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

Решение: (Удобно составить следующую таблицу).

	Взято (кг)	Отношение золота к серебру	Отношения веса золота к весу сплава	Взяли золота (кг)
1 сплав	X	2:3	2:5	2/5 X
2 сплав	8 – X	3:7	3:10	3/10 (8 – X)
новый	8	5:11	5:16	2/5 X+3/10 (8 – X)

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5}{16}\cdot 8 \ \ |\cdot 10$$

$$4x+3(8-x)=25$$

$$x=1(\text{кг})-\text{масса } 1-\text{го сплава, тогда второго надо взять } 7 \text{ кг}$$

Ответ: 1кг и 7 кг

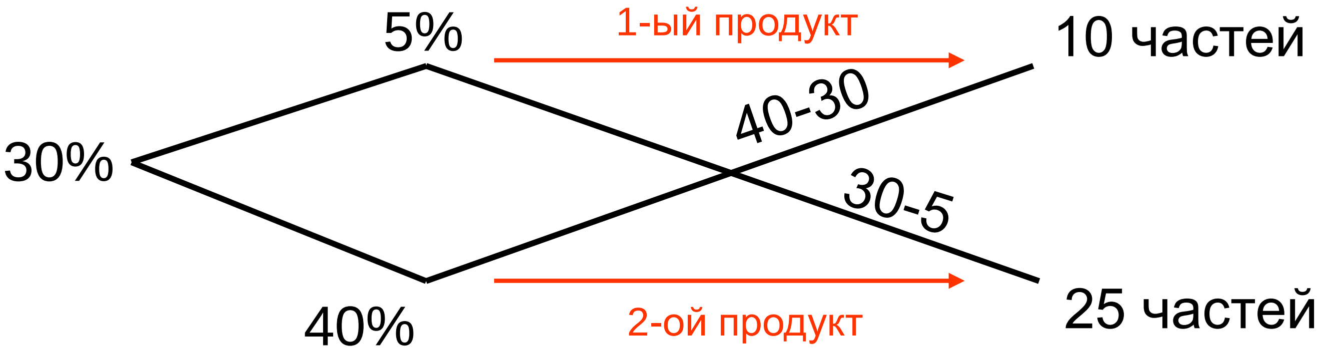
Задача 3. Смешивая 5% и 40% растворы кислот, необходимо получить 30% раствор. В каком соотношении их необходимо взять?

Решим задачу с помощью диагональной схемы или «конверта Пирсона»

Параметры конечного продукта

Параметры исходных продуктов

Доли исходных продуктов в конечном продукте



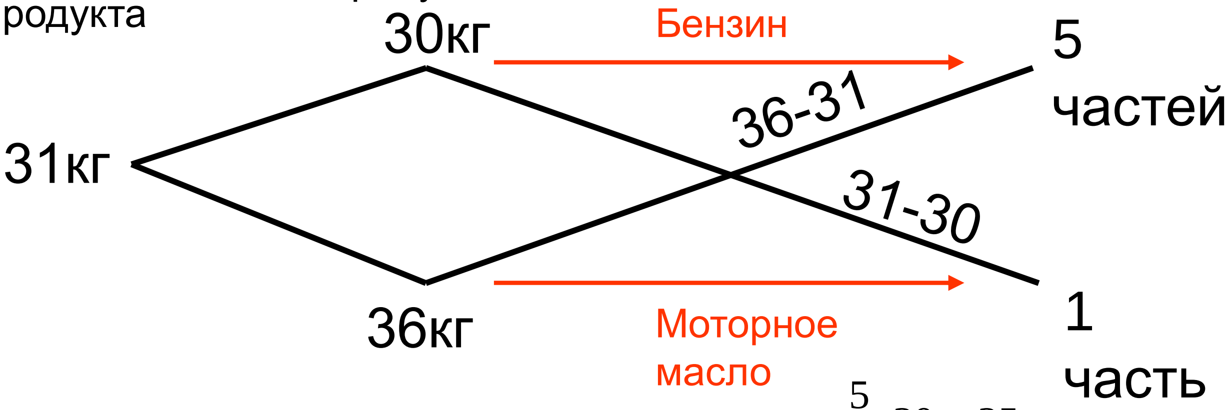
Соотношение первого и второго растворов – 10:25=2:5.

Задача 4. *. В бак помещается 30 кг бензина или 36 кг моторного масла. Для приготовления горючей смеси этот бак заполнили смесью бензина с маслом, причем так, что стоимость израсходованного бензина оказалась равной стоимости израсходованного масла. Масса получившейся в баке смеси составила 31 кг, а стоимость – 500 руб. Сколько стоит 1 кг бензина?* Решим задачу с помощью диагональной схемы или «конверта Пирсона»

Параметры конечного продукта

Параметры исходных продуктов

Доли исходных продуктов в конечном продукте



Масса бензина в горючей смеси составила $\frac{5}{6} \cdot 30 = 25кг$

Примечание. Масса моторного масла – 1/6 от 36 кг.

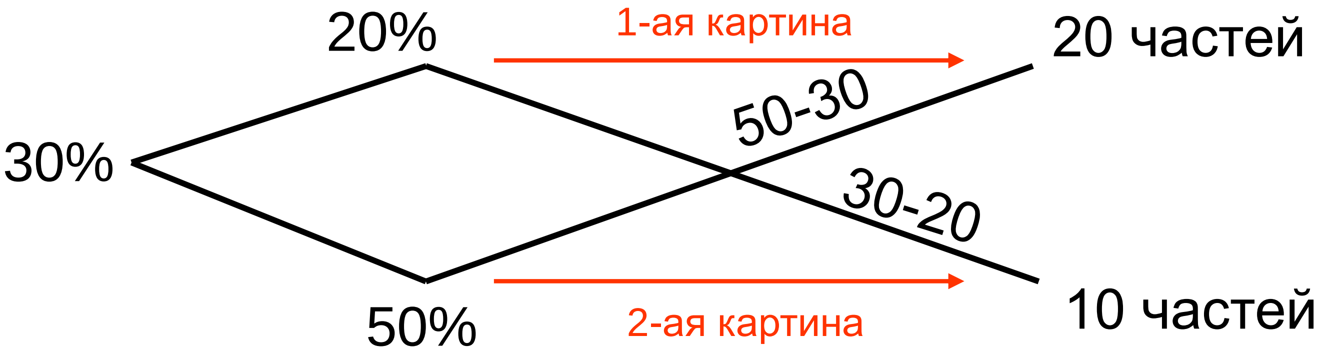
500:2:25=10(кг)

Ответ: цена бензина – 10 рублей за кг

Замечание!!! *Следует отметить, что «конверт Пирсона» применяется не только для решения задач на сплавы, но и для решения задач на доли и дроби*

Задача 5. *На аукционе одна картина была продана с прибылью 20%, а другая – с прибылью 50%. Общая прибыль от продажи двух картин составила 30%. У какой картины первоначальная стоимость была выше и во сколько раз?*

Параметры конечного продукта | Параметры исходных продуктов | Доли исходных продуктов в конечном продукте



Ответ: первоначальная стоимость первой картины была выше в 2 раза.

Алгоритм решения задачи на сплавы, растворы и смеси:

учитель будущего

- *Задачи на проценты, концентрации, смеси и сплавы встречаются не только в математике, но и в химии, где рассматриваются различные соединения. Они вызывают затруднения у школьников, в частности, у выпускников. Причина такой ситуации заключается в том, что тема «Проценты» изучается в классах, когда собственно математики еще нет, изучается непродолжительно и, наконец, к задачам на проценты не возвращаются в старших классах.*
- *Значит, для того чтобы научиться решать задачи, надо разобраться в том, что собой они представляют, как они устроены, из каких составных частей они состоят, каковы инструменты, с помощью которых производится решение задач. Знания всех способов решения помогают устранить пробелы данной темы.*

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!