

Векторно – координатный метод решения стереометрических задач

Овсянкина Оксана Алексеевна
учитель математики МБОУ СОШ № 28 г.о. Мытищи

По итогам РДР (региональной диагностической работы) по математике для 10 классов выявлен предметный дефицит, связанный с решением стереометрических задач. Сегодня на вебинаре мы рассмотрим методические подходы к решению стереометрических задач векторно – координатным методом.

В данном материале я попыталась собрать в единую систему методы решения задач по стереометрии. Не секрет, что основные затруднения при решении подобных задач заключаются именно в незнании эффективных методов решения. Конечно, в большинстве случаев их можно решить и стандартными методами, но это сложно и занимает много времени.

Основные виды задач :

1. Расстояние между точками
2. Расстояние от точки до прямой
3. Расстояние от точки до плоскости
4. Расстояние между скрещивающимися прямыми
5. Угол между прямой и плоскостью
6. Угол между плоскостями
7. Нахождение площади сечения
8. Нахождение объема многогранника

Основные методы решения стереометрических задач:

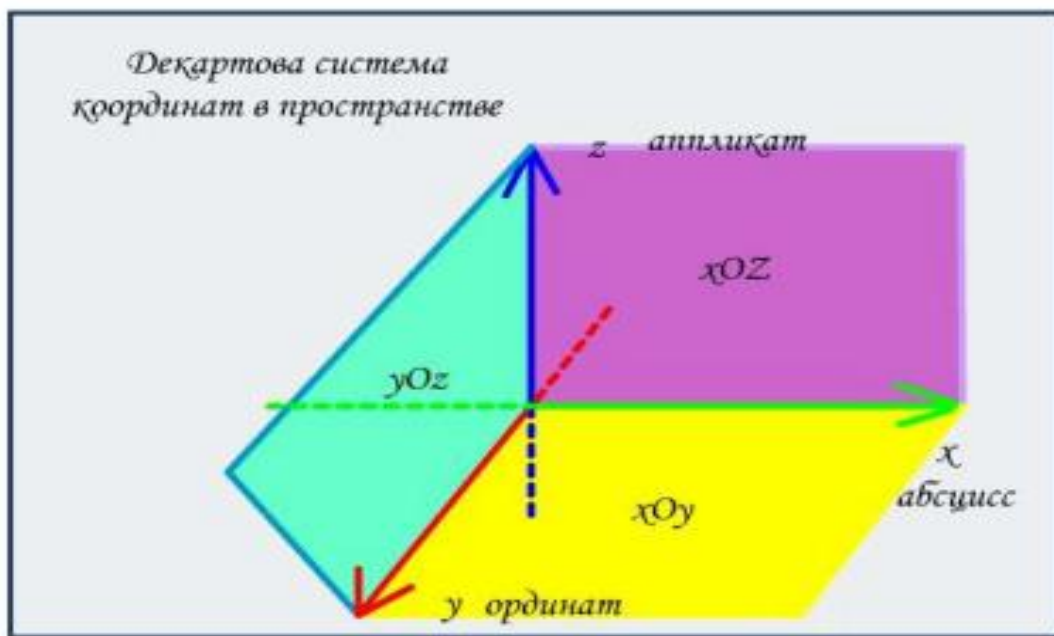
1. Поэтапно-вычислительный метод
2. Координатный метод
3. Координатно-векторный метод
4. Метод объёмов
5. Метод ключевых задач

Существует два способа решения задач по стереометрии.

Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение.

Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени для подготовки остается мало, а хочется решить эти сложные задачи.

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве – совокупность точки O (называемой *началом координат*), единицы измерения и трёх попарно перпендикулярных прямых Ox , Oy и Oz (называемых *осями координат*: Ox – *ось абсцисс*, Oy – *ось ординат*, Oz – *ось аппликат*), на каждой из которых указано направление положительного отсчёта. Плоскости xOy , yOz и zOx называют координатными плоскостями. Каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел, называемых её *координатами*.



Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец. Только в пространстве вектор задается тремя координатами x , y и z :

$$\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$$

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости — из координаты конца вычитаем координату начала.



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ в пространстве — это расстояние между точками A и B . Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Перед решением стереометрических задач координатно-векторным методом стоит запомнить следующие формулы:

- **Нахождение расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad , \text{ где } d=AB, A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$$

- **Нахождение координаты середины $C(x; y; z)$ отрезка AB ,**

$$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

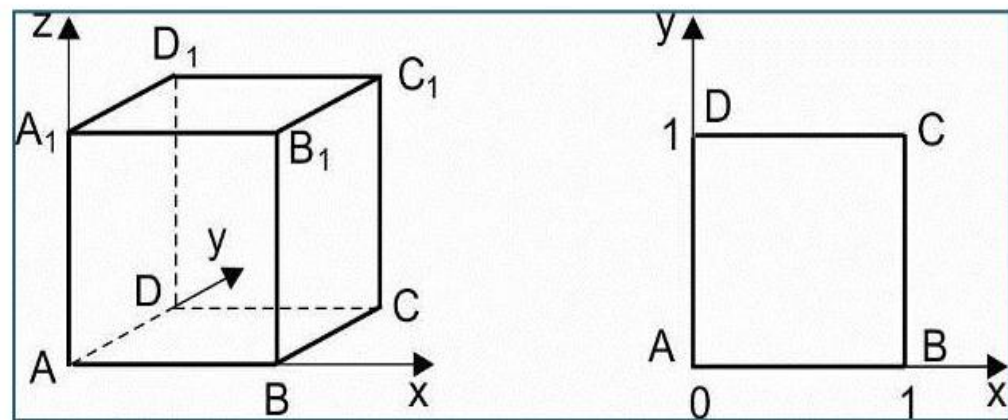
- **Координаты x, y, z точки M , которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ , определяется по формулам**

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Для решения задач необходимо научиться находить координаты вершин основных многогранников при помещении их в прямоугольную систему координат.

Ниже представлены координаты вершин некоторых многогранников, помещенных в систему координат.

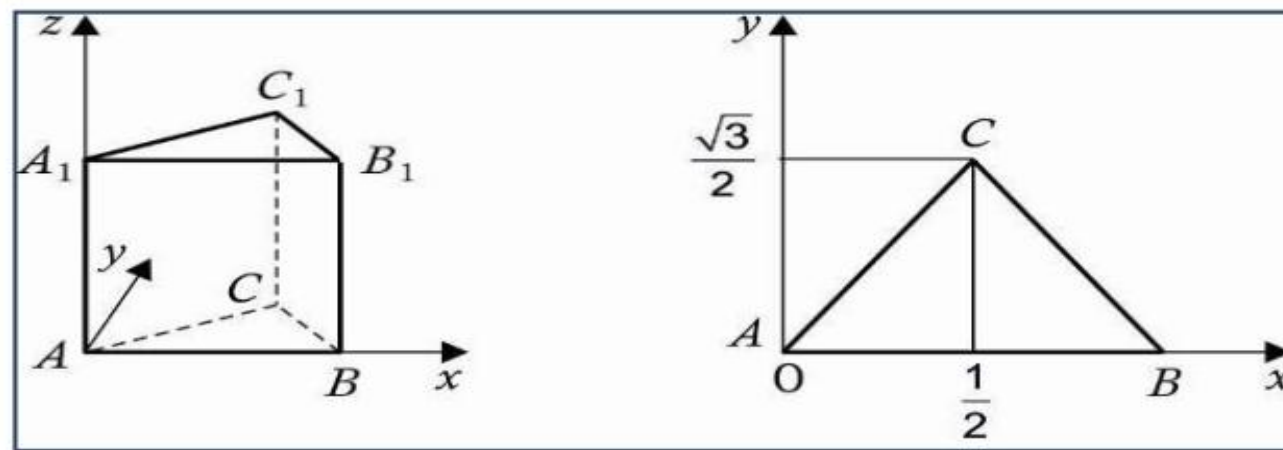
1. Едини́чный куб $A...D_1$



Координаты вершин:

$A(0,0,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $B_1(1,0,1)$, $D(0,1,0)$, $D_1(0,1,1)$, $C(1,1,0)$, $C_1(1,1,1)$.

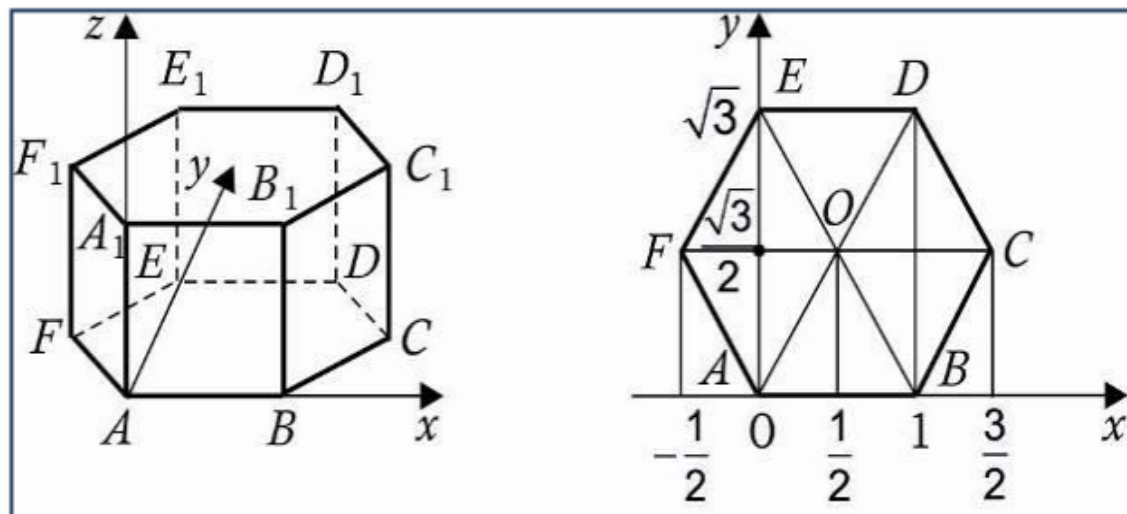
2. Правильная треугольная призма $A...C_1$, все ребра, которой равны 1.



Координаты вершин:

$A(0,0,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $B_1(1,0,1)$, $C(0,5;\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $C_1(0,5;\frac{\sqrt{3}}{2},1)$.

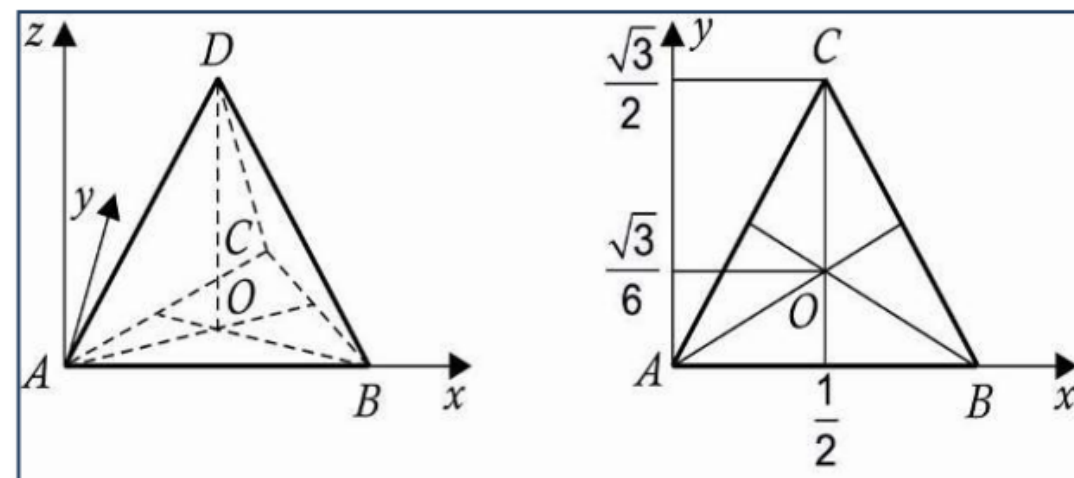
3. Правильная шестиугольная призма $A...F_1$, все ребра которой равны 1.



Координаты вершин:

$A(0,0,0), A_1(0,0,1), B(1,0,0), B_1(1,0,1), C(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), C_1(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1),$
 $D(1, \sqrt{3}, 0), D_1(1, \sqrt{3}, 1), E(0, \sqrt{3}, 0), E_1(0, \sqrt{3}, 1), F(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), F_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1).$

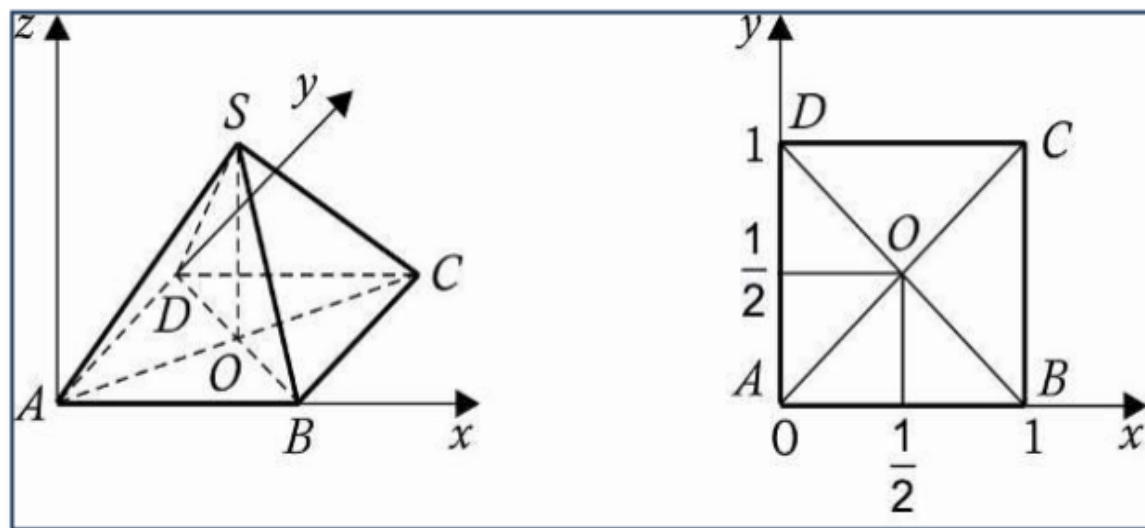
4. Правильная треугольная пирамида (тетраэдр) $ABCD$ все ребра которой равны 1.



Координаты вершин:

$A(0,0,0), B(1,0,0), C(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), D(0, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}),$

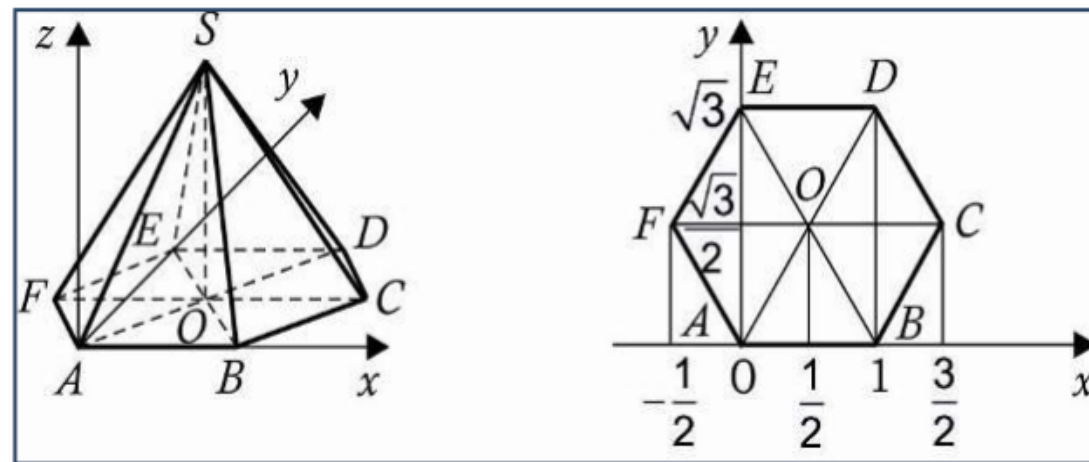
5. Правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны 1.



Координаты вершин:

$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), S(0,5;0,5;\frac{\sqrt{2}}{2})$.

6. Правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2.



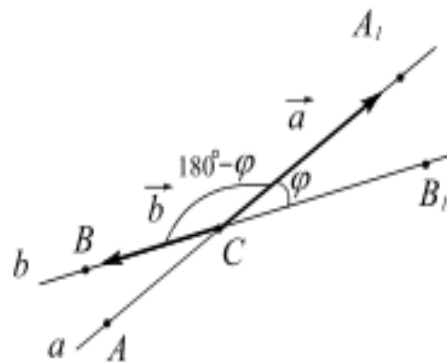
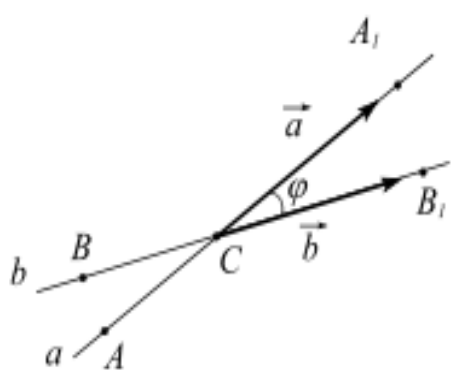
Координаты вершин:

$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,5;\frac{\sqrt{3}}{2},0), D(1, \sqrt{3}, 0), E(0, \sqrt{3}, 0), F(-0,5, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0),$
 $S(0,5;\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3})$.

Угол между скрещивающимися прямыми. Косинус угла φ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$) между прямыми a и b определяется по формуле:

$$\cos \varphi = |\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ где } \vec{a} \text{ и } \vec{b} - \text{векторы,}$$

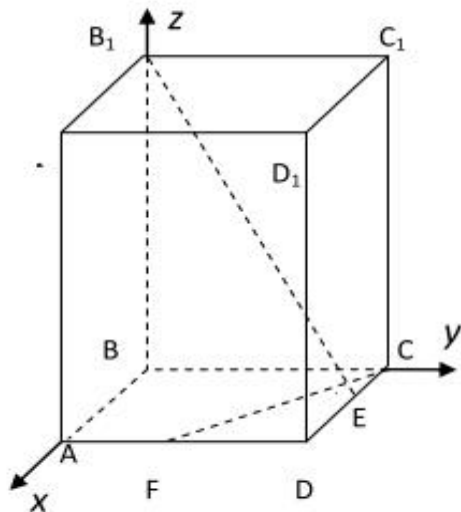
коллинеарные прямым a и b (см. рис. 8а и 8б).



Алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми:

1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора)
2. Вписываем фигуру в систему координат
3. Находим координаты концов векторов
4. Находим координаты Векторов
5. Подставляем в формулу "косинус угла между векторами"
6. После чего (если требуется в задаче), зная косинус, находим значение самого угла.

Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 2, высота — 4. Точка E — середина отрезка CD , точка F — середина отрезка AD . Найдите угол между прямыми CF и $B_1 E$.



Решение.

Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

Выпишем координаты точек B_1 , E , C , F в этой системе координат:

$$B_1 (0; 0; 4), E(1; 2; 0), C(0; 2; 0), \\ F(2; 1; 0).$$

Тогда $\overrightarrow{CF} (2; -1; 0)$, $\overrightarrow{B_1 E} (1; 2; -4)$. Найдём угол между этими векторами по формуле:

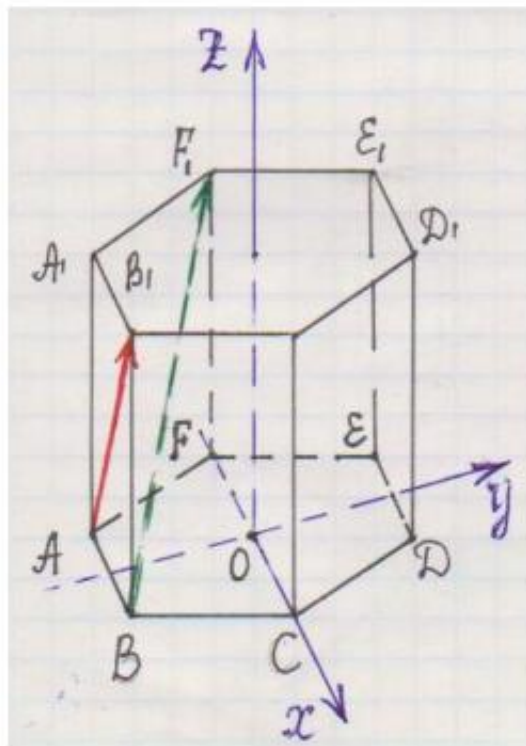
$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$$

То есть искомый угол $\alpha = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

Пример 4. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BF_1 .



Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке.

Тогда $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),$

$B_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), F_1(-1; 0; 1),$

$\overrightarrow{AB_1}\{1; 0; 1\}, \overrightarrow{BF_1}\left\{-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$

Отсюда $\cos \varphi = |\cos \varphi| = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BF_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{BF_1}|} =$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{8},$$

где φ — искомый угол.

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}.$

Угол между плоскостями. Пусть в декартовой системе координат плоскости α и β (см. рис. 12) заданы уравнениями:

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Вектора нормалей плоскостей имеют координаты $\vec{n}_\alpha = \{A_1; B_1; C_1\}$ и

$\vec{n}_\beta = \{A_2; B_2; C_2\}$. Тогда угол φ между

плоскостями α и β (см. рис. 13) определяется формулой:

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (***)$$

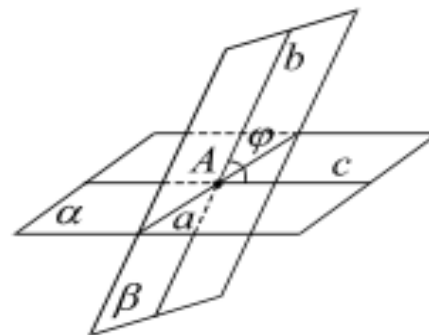
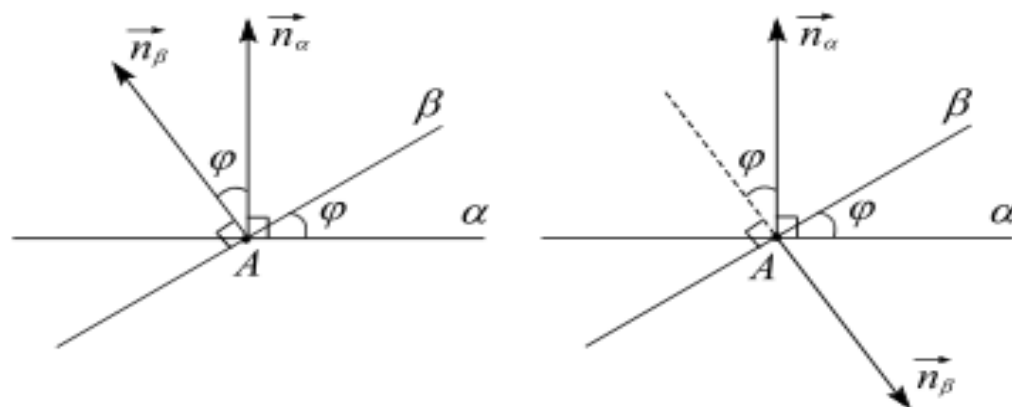


Рис. 12



Так же нужно понять, что вектор нормали к плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет координаты $\vec{n}\{A; B; C\}$

Для составления уравнения плоскости можно использовать определитель третьего порядка, который можно посчитать правилом Саррюса.

Итак, допустим у нас есть плоскость проходящая через точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2) \quad M_3(x_3; y_3; z_3)$$

Уравнение этой плоскости в координатной форме будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

Ниже представлено, как найти определитель третьего порядка по правилу Саррюса, составить уравнение плоскости и найти вектор нормали.

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $M_3(x_3; y_3; z_3)$
Чтобы составить уравнение нам нужно найти определитель (многочлен) с помощью правила Саррюса

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

Матрица

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $M_3(x_3; y_3; z_3)$
Чтобы составить уравнение нам нужно найти определитель (многочлен) с помощью правила Саррюса

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & - & - \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ 4 & 5 & 6 & + & + & + \end{vmatrix}$$

Матрица

Например
 $A(0;0;0), K(0;1;0,5), B(1;0;1)$

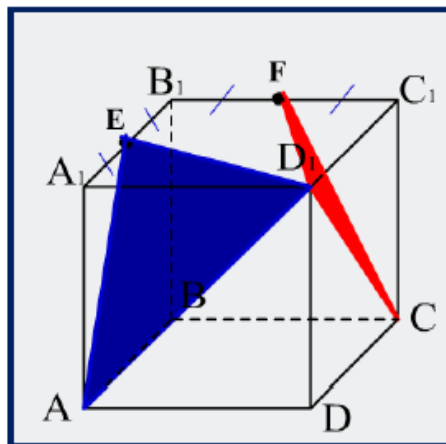
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0,5-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 0-0 & 1-0 \\ 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-0)(1-0)(1-0) + (y-0)(0,5-0)(1-0) + (z-0)(0-0)(0-0) - (z-0)(1-0)(1-0) - (x-0)(0,5-0)(0-0) - (y-0)(0-0)(1-0) = x + 0,5y - z$$

$x + 0,5y - z = 0$ - уравнение плоскости (АКВ). Вектор нормали $\vec{n}(1;0,5;-1)$

В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между (AD_1E) и (D_1FC) , где E и F середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение.



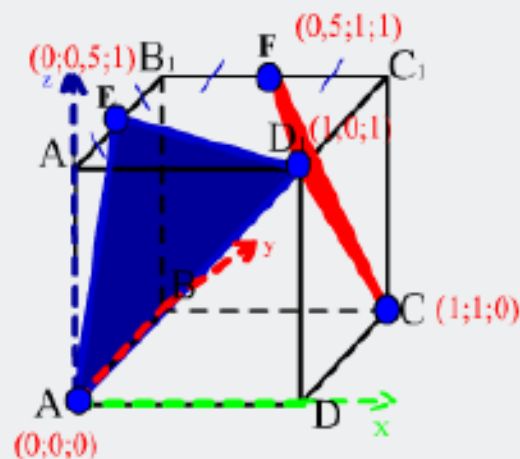
Впишем куб в прямоугольную систему координат и определим координаты точек, задающих указанные плоскости.

Составим уравнения плоскостей и найдем координаты векторов нормалей к ним:

(FD_1C) : $F(0,5;1;1)$, $D_1(1;0;1)$, $C(1;1;0)$
 $x-0.5 \quad y-1 \quad z-1 \quad x-0.5 \quad y-1$
 $1-0.5 \quad 0-1 \quad 1-1 \quad 1-0.5 \quad 0-1$
 $1-0.5 \quad 1-1 \quad 0-1 \quad 1-0.5 \quad 1-1$
 $x+0.5y+0.5z-1.5=0$ - ур-е плоскости (FD_1C) . $\Rightarrow \vec{n}(1;0,5;0,5)$

(AED_1) : $A(0;0;0)$, $E(0;0,5;1)$, $D_1(1;0;1)$
 $x-0 \quad y-0 \quad z-0 \quad x-0 \quad y-0$
 $0-0 \quad 0,5-0 \quad 1-0 \quad 0-0 \quad 0,5-1$
 $1-0 \quad 0-0 \quad 1-0 \quad 1-0 \quad 0-0$
 $0.5x+y-0.5z=0$ - ур-е плоскости (AED_1) $\Rightarrow \vec{m}(0,5;1;-0,5)$

Найдем косинус угла между плоскостями



(FD1C): F(0,5;1;1), D1(1;0;1),
C(1;1;0)

$\vec{n}(1;0,5;0,5)$

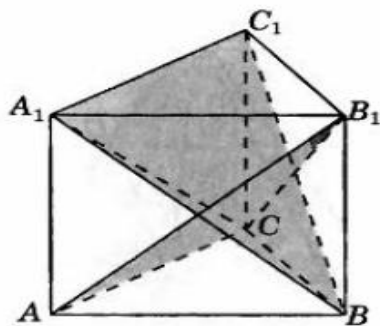
(AED1): A(0;0;0),
E(0;0,5;1), D1(1;0;1)

$\vec{m}(0,5;1;-0,5)$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = 0,5$$

→ угол = 60

3.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1 .



1) Координаты $A(0,0,0)$, $B_1(1,0,1)$, $C(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0)$, найдем уравнение плоскости (AB_1C) .

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 0,5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \text{ т.е. } \sqrt{3}x - y - \sqrt{3}z = 0$$

координаты вектора нормали $\vec{n}(\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$

2). Координаты $A_1(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $C_1(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1)$,

найдем уравнение плоскости (A_1BC_1) .

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0,5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \text{ т.е. } \sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$$

координаты вектора нормали

$$\vec{m}(\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}) \text{ и } \vec{n}(\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$$

3). Найдем косинус угла между плоскостями (AB_1C) и (A_1BC_1) :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}|}{|\sqrt{3+1+3}| \cdot |\sqrt{3+1+3}|} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

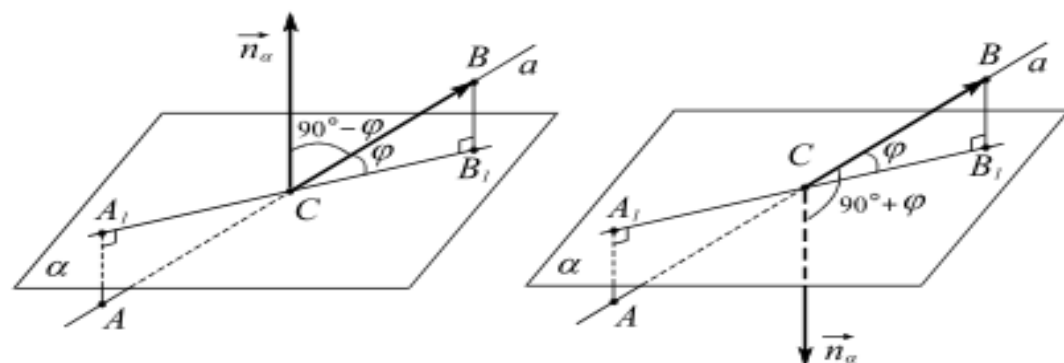
Угол между прямой и плоскостью. Пусть в пространстве введена декартова система координат, и плоскость α задана уравнением:

$Ax + By + Cz + D = 0$, тогда вектор нормали плоскости $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

Пусть задан направляющий вектор прямой a : $\vec{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$. Тогда

синус угла φ между прямой и плоскостью определяется формулой (см. рис. 10):

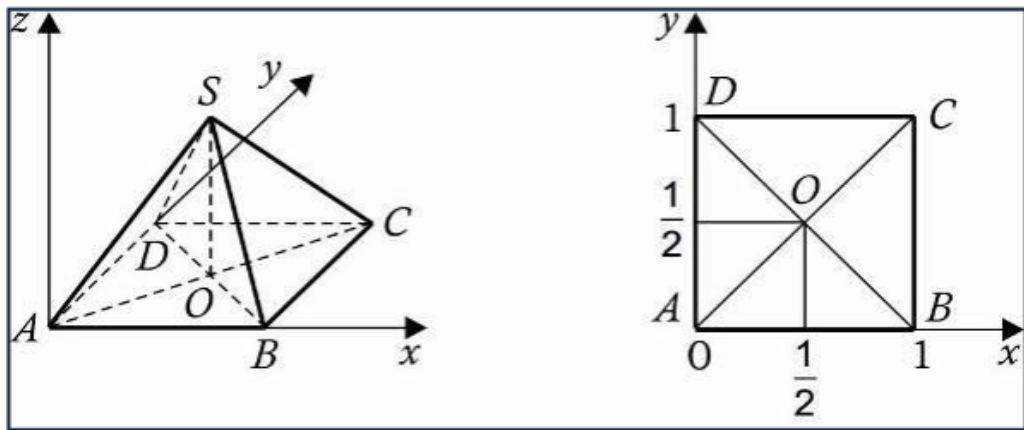
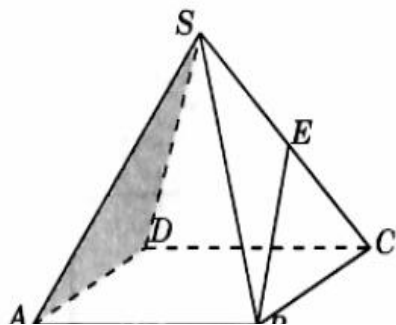
$$\sin \varphi = |\cos \angle(a, \alpha)| = \frac{|\vec{n}, \vec{q}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C \cdot q_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. (**)$$



Алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью:

1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямую и плоскость (прямой придаем направление, т.е. вектор)
2. Вписываем фигуру в систему координат
3. Находим координаты концов направляющего вектора.
4. Находим координаты вектора (рассмотрено ранее)
5. Находим координаты вектора нормали к плоскости (рассмотрено ранее)
6. Подставляем в формулу "синус угла между прямой и плоскостью"
7. После чего (если требуется в задаче), зная синус, находим значение самого угла.

2.3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD , где E — середина ребра SC .



1) Координаты точек $B(1,0,0)$, $E(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$; вектора $\overrightarrow{BE}(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

2) Составим уравнение плоскости (ADS) , учитывая, что $A(0,0,0)$, $D(0,1,0)$,

$$S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 0 & 1 - 0 & 0 - 0 \\ 0,5 - 0 & 0,5 - 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}z = 0, \text{ координаты вектора нормали } \vec{n}(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{2});$$

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\frac{-1}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8}|}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

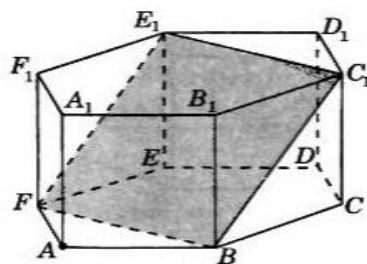
Расстояние от точки $M(x_M; y_M; z_M)$ до плоскости α , заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, может быть вычислено

по формуле:
$$\rho(M, \alpha) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние между параллельными плоскостями α_1 и α_2 ($\alpha_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $\alpha_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$) вычисляется

по формуле:
$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5.3. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1 .



Решение.

1) Координаты вершин: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $E_1(0, \sqrt{3}, 1)$, $F(-0.5, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, найдем уравнение плоскости (E_1BF) .

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 1 & \sqrt{3} - 0 & 1 - 0 \\ -0.5 - 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ -1.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости:

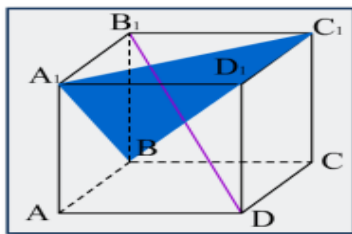
$\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) - 1.5y + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.5 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot z = 0$ т.е. $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 1.5y + \sqrt{3}z - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, значит координаты вектора нормали $\vec{n}(\sqrt{3}; -3; 2\sqrt{3})$.

3) Найдем расстояние от точки A до плоскости (A_1BD)

$$\rho = \frac{|A_0 \cdot x + B_0 \cdot y + C_0 \cdot z + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2\sqrt{3} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (-3)^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

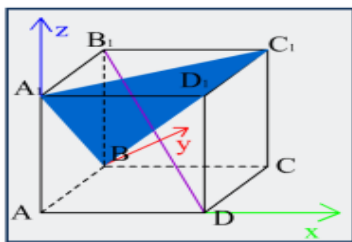
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ проведена диагональ B_1D . В каком отношении, считая от вершины B_1 , плоскость A_1BC_1 делит диагональ B_1D ?

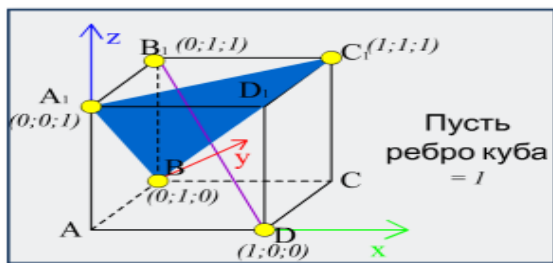


Решение.

Впишем куб в систему координат как показано на рисунке.



Найдем координаты точек. Составим уравнение плоскости.



Пусть ребро куба = 1

$A_1(0;0;1)$
 $B(0;1;0)$
 $C_1(1;1;1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Пусть ребро куба = 1

$A_1(0;0;1)$
 $B(0;1;0)$
 $C_1(1;1;1)$

$x - y - z + 1 = 0$ - ур-е плоскости. $\rightarrow \vec{n}(1;-1;-1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Найдем расстояние от точек до плоскости.

Пусть ребро куба = 1

$A_1BC_1: A_1(0;0;1)$
 $B(0;1;0)$
 $C_1(1;1;1)$
 $\vec{n}(1;-1;-1)$
 $B_1(0;1;1)$
 $D(1;0;0)$

$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$\rho(B_1; a) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\rho(D; a) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

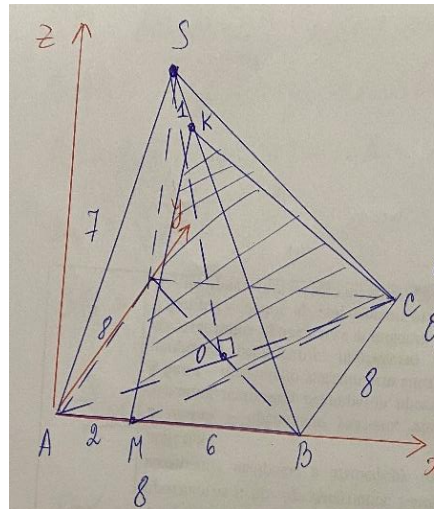
$\frac{\rho(B_1; a)}{\rho(D; a)} = 2:1$

Ответ: 2:1

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.



Дано: $SABCD$ — правильная
4-я пирамида
 $AB = 8$, $SA = 7$
 $AM = 2$, $SK = 1$

а) Доказать: $(CKM) \perp (ABC)$
б) Найти: V_{BCKM}

а) Введём прямоугольную систему
координат.

$A(0; 0; 0)$; $B(8; 0; 0)$; $C(8; 8; 0)$
составим уравнение плоскости (ABC) :

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 8-0 & 0-0 & 0-0 \\ 8-0 & 8-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad 0x - 0y + 1z = 0$$

$\vec{n}_1 \{0; 0; 1\}$; $d = 0$

SO - высота пирамиды

$\triangle ASO$ - прямоугольный

$$AC = 8\sqrt{2} \Rightarrow AO = 4\sqrt{2}$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2}$$

$$SO = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{49 - 32} = \sqrt{17}$$

$$\underline{S \quad K \quad G \quad B}$$

$$S(4; 4; \sqrt{17}); B(8; 0; 0)$$

$$K\left(\frac{6 \cdot 4 + 1 \cdot 8}{7}; \frac{6 \cdot 4 + 1 \cdot 0}{7}; \frac{6 \cdot \sqrt{17} + 1 \cdot 0}{7}\right)$$

$$K\left(\frac{32}{7}; \frac{24}{7}; \frac{6\sqrt{17}}{7}\right); M(2; 0; 0);$$

$$C(8; 8; 0)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ \frac{18}{7} & \frac{24}{7} & \frac{6\sqrt{17}}{7} \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ \frac{18}{7} & \frac{24}{7} & \frac{6\sqrt{17}}{7} \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - 3y - 0z - 8 = 0$$

$$\vec{n}_2 \{ 4; -3; 0 \}; d = -8$$

$$\cos(\angle CKM; ABC) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} =$$

$$= \frac{|0 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 0|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\angle(CKM; ABC) = 90^\circ \Rightarrow (CKM) \perp (ABC)$$

$$8) V_{BCKM} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCM} \cdot H$$

$H_{\text{пирамиды}} = \rho(K; (ABC))$ - это расстояние от точки K до плоскости (ABC)

$$\rho(K; (ABC)) = \frac{|x_K \cdot 0 + y_K \cdot 0 + z_K \cdot 1 + 0|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{\left| \frac{32}{7} \cdot 0 + \frac{24}{7} \cdot 0 + \frac{6\sqrt{17}}{7} \cdot 1 \right|}{1} = \frac{6\sqrt{17}}{7}$$

$$S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$$V_{BCKM} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \frac{6\sqrt{17}}{7} = \frac{48\sqrt{17}}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{48\sqrt{17}}{7}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми можно находить, используя смешанное произведение. Так как они скрещиваются, их направляющие векторы s_1 , s_2 и вектор

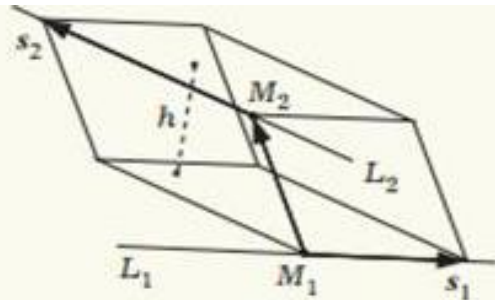


Рис. 6.7

направляющих векторов прямых. В результате получаем формулу для расстояния $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|s_1 s_2 \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|s_1 \times s_2|}.$$

Алгоритм нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми

1. Взять систему координат.
2. Найти координаты векторов: $\vec{q}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$; $\vec{q}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$; - на скрещивающихся прямых, $\vec{m} = \{x_3; y_3; z_3\}$ -начало вектора на одной и конец на другой из скрещивающихся прямых.
3. Найти : $\vec{c} = \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \{x; y; z\}$
4. Вычислить длину этого вектора: $|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. Найти модуль смешанного произведения векторов $\vec{q}_1; \vec{q}_2; \vec{m}$: $s = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
6. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми: $d = \frac{|s|}{|\vec{c}|}$.
7. Ответ. d .

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB=SM:MC=1:4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении 1:4, считая от вершины A .

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM .

Дано: $SABC$ - правильн. Δ пирам.,
 $AB=5$, $SA=3$,
 $K \in AB$, $M \in SC$,
 $AK:KB=SM:MC=1:4$
 $KM \in \alpha$, $\alpha \parallel SA$

а) Доказать: $AN:NC=1:4$
 Доказательство:
 Доп. постро: $KL \parallel AS$; $KL \cap SB = L$;
 $MN \parallel AS$; $MN \cap AC = N$;
 $LM \parallel KN$.

$(KLM) = \alpha$

2) $SA \in (SAC)$,
 $\alpha \parallel SA$,
 $\alpha \cap (SAC) = MN \Rightarrow MN \parallel SA$ (по обратной теореме
 $\alpha \parallel$ прямой и плоск.)

3) $SA \parallel MN$,
 $SM:MC=1:4 \Rightarrow AN:NC=1:4$ (по теор. Фалеса)

б) Найти расстояние м/у прямыми SA и KM ?!
 Введём прямоугольную систему
 координат.
 ΔAHB : $AH = \sqrt{5^2 - (\frac{5}{2})^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{25 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$
 $A(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$; $B(0; \frac{5}{2}; 0)$.
 Найдём координаты точки K с
 помощью формулы: "Деление отрезка в
 заданном отношении."

$A \quad 1 \quad 4 \quad B$
 K

$$K \left(\frac{4 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot 0}{1+4}; \frac{4 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{5}{2}}{1+4}; \frac{4 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{1+4} \right)$$

$$K \left(2\sqrt{3}; \frac{1}{2}; 0 \right)$$

Аналогично, координаты точки М.

$$\underline{S \quad M \quad C}$$

$$C \left(0; -\frac{5}{2}; 0 \right).$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{2}{1} \text{ (т.к. } AH - \text{ медиана } \triangle ABC)$$

$$\frac{AO}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow AO = \frac{2}{3} AH; OH = \frac{1}{3} AH$$

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}; OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2}; SO = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$M \left(\frac{4 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} + 1 \cdot 0}{1+4}; \frac{4 \cdot 0 + 1 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{1+4}; \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + 1 \cdot 0}{1+4} \right)$$

$$M \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{4\sqrt{6}}{15} \right)$$

$$\overrightarrow{KM} \left\{ -\frac{4\sqrt{3}}{3}; -1; \frac{4\sqrt{6}}{15} \right\}; \overrightarrow{AS} \left\{ -\frac{5\sqrt{3}}{3}; 0; \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

$$\overrightarrow{KM} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \frac{4\sqrt{6}}{15} - 0 \right\}$$

$$\overrightarrow{KM} \left\{ -\frac{4\sqrt{3}}{3}; -1; \frac{4\sqrt{6}}{15} \right\}$$

$$\overrightarrow{AS} \left\{ \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{2}; 0 - 0; \frac{\sqrt{6}}{3} - 0 \right\}$$

$$\overrightarrow{AS} \left\{ -\frac{10\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}; \overrightarrow{AS} \left\{ -\frac{5\sqrt{3}}{3}; 0; \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

$$\overrightarrow{AK} \left\{ 2\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - 0; 0 - 0 \right\}; \overrightarrow{AK} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}$$

$$(\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{AK}) = \begin{vmatrix} -\frac{5\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{4\sqrt{6}}{15} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

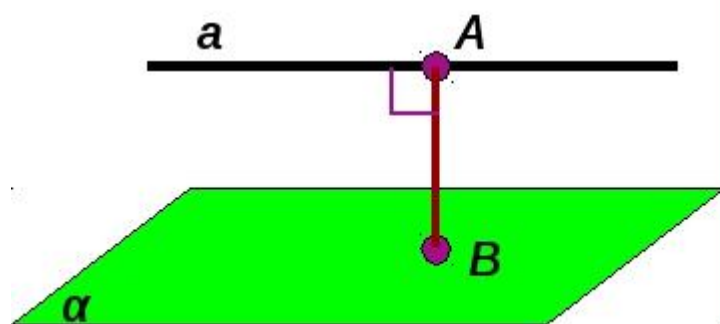
$$(\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{KM}):$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{4\sqrt{6}}{15} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{3} \vec{i} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \vec{k}$$

$$\rho = \frac{\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью



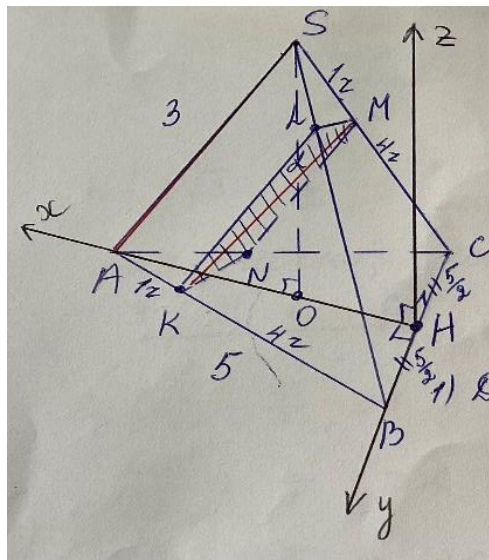
Все точки прямой равноудалены от плоскости. Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB=SM:MC=1:4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении 1:4, считая от вершины A .

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM .



б) Найти расстояние между
прямыми SA и KM ?

$$SA \parallel \alpha \Rightarrow \rho(SA; KM) = \rho(A; \alpha).$$

$$\alpha = (KML) = (KMN)$$

$$K(2\sqrt{3}; \frac{1}{2}; 0); M(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{4\sqrt{6}}{15})$$

$$MN \parallel SA \Rightarrow \frac{SM}{MC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{4}$$

$$\underline{A \quad N \quad C} \quad C(0; -\frac{5}{2}; 0)$$

$$A(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$$

$$N(\frac{1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{5}; \frac{1 \cdot (-\frac{5}{2}) + 4 \cdot 0}{5}; \frac{1 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{5})$$

$$N(2\sqrt{3}; -\frac{1}{2}; 0)$$

Если рассмотреть плоскость Oxy ,
то заметим, что точки N и K симмет-
ричны относительно оси Ox .

Составим уравнение плоскости (KMN)

$$\begin{vmatrix} x - 2\sqrt{3} & y - \frac{1}{2} & z \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{4\sqrt{6}}{15} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sqrt{6}x + 0y - 6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}z = 0$$
$$\vec{n} = \{ \sqrt{6}; 0; 5\sqrt{3} \}; d = -6\sqrt{2}; A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$$
$$h = \frac{\left| \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} + 0 \cdot 0 + 5\sqrt{3} \cdot 0 - 6\sqrt{2} \right|}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (5\sqrt{3})^2}}$$
$$h = \frac{3\sqrt{2}}{2} : g = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Задачи для самостоятельного решения:

Пример 1. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .
Ответ: $\sqrt{3}/3$

Пример 2. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .

Пример 3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания призмы.

Пример 4.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

- Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 , B_1 и C .
- Найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 B_1$.

Пример 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 6$, $DC = 6$, $CC_1 = 4$.

- Докажите, что плоскость BDD_1 перпендикулярна отрезку AC
- Найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Мнения о методе координат

(орфография, пунктуация и лексика авторов сохранена)

- Очень – очень советую освоить координатный, вряд ли будет что-то такое, что координатным не решить! Меня км спасал не один раз. (Пользователь esclade279. Форум <http://abiturient.pro>)
- Чтобы успешно решить С2, нужно разобраться в одном универсальном способе: - координатный способ. Все длины, углы легко находятся. - бывший абитуриент, ныне студент (Пользователь delpaNz. Форум <http://abiturient.pro>)
Ребят, решайте координатным методом С2! Так без особых знаний можно
- решить почти любую задачу.(Пользователь 777Julia777 <http://forum.postupim.ru>)
А почему бы учителям не научить абитуру считать определители 3-го порядка? Тогда задача на нахождение расстояния от точки до прямой и между прямыми из суперсложной и недоступной многим геометрической задачи становится простой арифметической задачкой, где главное – не наврать в счете. Конечно, ваше учительское сердце протестует против этого, стремясь всех научить геометрическим методам, но результат +2 балла все таки наиболее вероятен во втором случае. Да и в универе нет чистой геометрии, только аналитическая.(Пользователь Марина <http://www.alexlarin.com>)

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!



Удачи!!!
Успехов!!!
Уверенности
в себе и в свои возможности!!!