АКАДЕМИЯ СОЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Методика обучения решению рациональных уравнений и неравенств.

Леднева Татьяна Викторовна, учитель математики высшей квалификационной категории, почетный работник общего образования Российской Федерации, эксперт ОГЭ и ЕГЭ по математике

Значение уравнений и неравенств в школьном курсе математики

Понятие уравнения является ведущим алгебраическим понятием. Эта линия развертывается в трех основных направлениях:

- Прикладная направленность
- Теоретико-математическая направленность
- Направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики:

✓ с числовой линией

✓ с функциональной линией

✓ с линией тождественных преобразований

✓ с алгоритмической линией

Основные понятия, термины и преобразования линии уравнений

Определение1: Равенство, содержащее переменную, называется уравнением.

Определение 2: Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Определение 3: Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Основные понятия, термины и преобразования линии уравнений

Определение: уравнения называются равносильными, если выполнены условия: 1) области определения уравнений одинаковы и 2) множества их корней равны.

Пути установления равносильности уравнений.

- используя известные множества корней уравнений, убедиться в их совпадении; например, уравнения $x + 1 = x + 2$ и $x^2 + 1 = x^2 + 2$ равносильны, потому что не имеют корней.
- используя особенности записи уравнений, осуществить последовательный переход от одной записи к другой посредством преобразований, не нарушающих равносильности.

Основные понятия, термины и преобразования линии уравнений

Определение: Если каждый корень первого уравнения является корнем второго, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Если из правильности первого равенства следует правильность каждого последующего, то получаем уравнения-следствия.

При использовании уравнений-следствий не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании уравнений-следствий проверка полученных корней подстановкой их в исходное уравнение является составной частью решения

Основные понятия, термины и преобразования линии уравнений

Основные термины:

- переменная;
- уравнение;
- корень уравнения;
- что значит решить уравнение?
- равносильность;
- логическое следование и др.

Основные преобразования:

1. Тождественные;
2. Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение
3. Преобразования, изменяющие логическую структуру: $f(x)g(x)=0 \rightarrow f(x)=0$ или $g(x)=0$;

Место уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

I этап (пропедевтический).

- **1-4 классы:** Элементарные сведения о переменной и уравнении. Основной метод решения – нахождение неизвестного компонента действий [2+x =5]. [Интуитивно-практический уровень]
- **5-6 классы:** Определение понятия уравнения как равенства, содержащего неизвестное число/ переменную величину. Решение линейных уравнений. Составление уравнения для решения текстовых задач.

Место уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

II этап (основной).

- **7 класс:**
  - вводится четкое определение уравнения;
  - теоретически обосновываются свойства уравнений;
  - дедуктивное обоснование процесса решения уравнения;
  - решение систем уравнений;
  - использование графического метода решения.

- **8 класс:**
  - вводится определение неравенства;
  - теоретически обосновываются свойства неравенств;
  - решение систем линейных неравенств с одной переменной;
  - квадратные уравнения и неравенства;
  - рациональные уравнения и неравенства.

.

Место уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы

- **9 класс:**

❑целое уравнение и его корни;

❑решение уравнений 3-й и 4-й степеней;

❑уравнение с двумя переменными и его график;

❑системы уравнений второй степени с двумя неизвестными.

III этап (завершающий).

- 10-11 классы:

❑тригонометрические уравнения;

❑простейшие тригонометрические неравенства;

❑показательные уравнения, неравенства и их системы;

❑логарифмические уравнения, неравенства и их системы;

❑иррациональные уравнения, неравенства и их системы.

АСОУ
АКАДЕМИЯ СОЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Особенности изучения неравенств

ЦНППМ
ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

- Навыки решения неравенств формируются на более низком уровне, чем для уравнений, т.к. теория неравенств объективно сложнее теории уравнений;
- Большинство приемов решения состоит в переходе от неравенства $f(x)>g(x)$ к уравнению $f(x)=g(x)$ и в обратном переходе от найденных корней уравнения к множеству решений неравенства. Этот переход превращается в основной метод решения неравенств – метод интервалов.
- Темы, относящиеся к неравенствам, расположены после тем, относящихся к соответствующему классу уравнений.
- Большую роль играют наглядно-графические методы, поэтому изучение неравенств зависит от качества изучения функциональной линии.

Типичные ошибки учащихся при решении уравнений и неравенств

1. Ошибки в тождественных преобразованиях выражений в одной из частей;

2. Неодинаковость и неправомерность действий, выполняемых в левой и правой части;

3. Упрощение левой и правой частей в отдельности, в результате чего может измениться ОДЗ;

4. Деление/умножение обеих частей на одно и то же выражение, содержащее переменную;

Типичные ошибки учащихся при решении уравнений и неравенств

5. Извлечение квадратного корня из обеих частей с неумением поставить после этого правильный знак;

6. Возведение в квадрат обеих частей, что может привести к расширению ОДЗ;

7. При замене переменной не определяется ОДЗ новой переменной и др.

Схема обучения решению уравнений и неравенств

1) мотивация введения нового вида уравнения;

2) подведение к понятию нового вида уравнения и введение его определения;

3) классификация понятия нового вида уравнения, выделение частных случаев простейших уравнений;

4) решение простейших уравнений данного вида;

5) анализ действий, необходимых для их решения;

6) вывод алгоритма (формулы, правила) решения, его наглядное представление и отработка;

7) решение несложных уравнений данного вида, не являющихся простейшими;

Схема обучения решению уравнений и неравенств

8) анализ действий, необходимых для их решения с применением алгоритма;

9) формулировка частного приема решения, его наглядное представление;

10) применение полученного частного приема по образцу, в сходных ситуациях;

11) решение текстовых задач, приводящих к решению уравнений с помощью полученного частного приема;

12) сравнение полученных частных приемов решения;

13) применение обобщенного приема решения уравнений в различных ситуациях;

14) контроль знаний, умений и навыков учащихся на предмет соответствия требованиям стандарта.

Рациональные уравнения

Целое алгебраическое уравнение принято записывать в виде: $\boldsymbol{P_n(x) = 0,}$

где $\boldsymbol{P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,}$

где $a_0, a_1, \ldots a_n$ – заданные числа, x – переменная, n – степень алгебраического уравнения Выражение Pn(x) называют многочленом степени n.

Если коэффициент при старшей степени неизвестной равен 1, то целое алгебраическое уравнение называется приведенным.

Рациональные уравнения

Уравнения, содержащие многочлены и алгебраические дроби (дроби вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены), называются *дробными алгебраическими уравнениями* или *дробно-рациональными уравнениями*.

Рациональные уравнения

При решении *линейного уравнения* $a \cdot x = b$ возможны три случая:

1) $a \neq 0$, тогда $x = \frac{b}{a}$ – единственный корень уравнения;

2) $a = 0, b = 0$, тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x, т.е. ответом является $x \in R$

3) $a = 0, b \neq 0$, тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.

Рациональные уравнения

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0, (a \neq 0)$ называется *квадратным уравнением* с одной переменной. Его корни вычисляются по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Выражение $D=b^2-4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения. Таким образом, квадратное уравнение имеет действительные корни только в случае $D \geq 0$.

Рациональные уравнения

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0, (a \neq 0)$ называется *квадратным уравнением*

Если $b=2k$, $k \in Z$, т.е. b – четное число, то квадратное уравнение можно записать в виде $ax^2+2kx+c=0$. Тогда формулу для корней квадратного уравнения можно упростить и использовать в виде

$$x_{1,2}=\frac{-k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Общие методы решения уравнений

«Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и впоследствии подтвердить это, что, следуя нашему методу, мы достигли цели»

Готфрид Лейбниц

Общие методы решения уравнений

Определение 1: Методы решения уравнений – это способы, приёмы, с помощью которых можно решить то или иное уравнение.

Определение2: Общие методы решения уравнений – это такие способы, приёмы, с помощью которых можно решить уравнения разного типа.

АСОУ
АКАДЕМИЯ СОЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Общие методы решения уравнений

ЦНППМ
ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

- ❑Метод разложения на множители.
- ❑Метод введения новой переменной.
- ❑Функционально-графический метод.

Решение простейших уравнений по известной формуле или алгоритму.

Метод разложения на множители

Данный метод состоит в том, чтобы, используя группировку слагаемых, а также формулы сокращенного умножения, привести исходное уравнение к виду, когда слева записано произведение сомножителей, а справа – нуль. Затем каждый из сомножителей приравнивается к нулю, и путем решения простейших уравнений находятся корни исходного уравнения.

Метод разложения на множители

Теорема Безу: Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x – a$ равен значению этого многочлена при $x = a$

Следствие 1: Если число a является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на $x – a$ без остатка.

Следствие 2: Многочлен степени n имеет не более n корней.

Следствие 3: Если коэффициенты приведенного целого рационального уравнения являются целыми числами и уравнение имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Метод разложения на множители

Решить уравнение

$$x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0.$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-3x^3-8x^2+12x+16 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+x^3} & x^3-4x^2-4x+16 \\
-4x^3-8x^2 & \\
\underline{-4x^3-4x^2} & \\
-4x^2+12x & \\
\underline{-4x^2-4x} & \\
16x+16 & \\
\underline{16x+16} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$(x+1)(x^3-4x^2-4x+16)=0.$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-4x^2-4x+16 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2-6x+8 \\
-6x^2-4x & \\
\underline{-6x^2-12x} & \\
8x+16 & \\
\underline{8x+16} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$(x+1)(x+2)(x^2-6x+8)=0$$

Ответ: $x_1=-2;\ x_2=-1;\ x_3=2;\ x_4=4.$

Метод разложения на множители

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

на a_0^{n-1}:

$$a_0^n x^n + a_1 a_0^{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0^{n-1} x + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

$$y = a_0 x \qquad y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_0^{n-1} a_n = 0. \qquad x = \frac{y}{a_0}$$

АКАДЕМИЯ СОЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Метод разложения на множители

ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Решить уравнение

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Решение. Умножаем обе части уравнения на 3^2. Имеем:

$$3^3x^3 - 7\cdot 3^2x^2 + 15\cdot 3x - 9 = 0$$

Обозначим $y = 3x$ и запишем уравнение в виде

$$y^3 - 7y^2 + 15y - 9 = 0$$

$$(y-1)(y-3)^2 = 0,$$

$$y_1 = 1 \quad \text{и} \quad y_{2,3} = 3.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{3};\ x_{2,3} = 1.$

$$\begin{array}{r|l}
y^3 - 7y^2 + 15y - 9 & y - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{y^3 - y^2} & y^2 - 6y + 9 \\
-6y^2 + 15y & \\
\underline{-6y^2 + 6y} & \\
9y - 9 & \\
\underline{9y - 9} & \\
0 &
\end{array}$$

Метод разложения на множители

Решить уравнение

$$10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Решение. После деления на x^3 получаем

$$10 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0.$$

Полагая $\frac{1}{x} = t$, приходим у уравнению

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

$$t^3 - 2t^2 - 3t + 10 = 0.$$

Метод разложения на множители

Теорема 2. Пусть коэффициенты уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

являются целыми числами. Если несократимая дробь $x = \frac{p}{q}$ является корнем уравнения , то число p является делителем свободного члена a_n, а число q – делителем старшего коэффициента a_0.

Метод разложения на множители

Решить уравнение

$$3x^3+5x^2+8x+4=0.$$

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{4}{3}.$$

$x+\frac{2}{3}$ (а еще лучше – на $3x+2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)$),

$$(3x+2)\left(x^2+x+2\right)=0.$$

Ответ: $x=-\frac{2}{3}$.

Метод разложения на множители.

Способ группировки

Решить уравнение

$$2x^4+4x^3-7x^2-8x+6=0.$$

$$\left(2x^4-7x^2+6\right)+\left(4x^3-8x\right)=0.$$

$$2z^2-7z+6=(2z-3)(z-2)$$

$$2x^4-7x^2+6=\left(2x^2-3\right)\left(x^2-2\right).$$

$$\left(2x^2-3\right)\left(x^2-2\right)+4x\left(x^2-2\right)=0.$$

$$\left(x^2-2\right)\left(2x^2-4x-3\right)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2=0 \\ 2x^2-4x-3=0 \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm\sqrt{2}; \\ x_{3,4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\pm\sqrt{2};\ x_{3,4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}.$

Метод разложения на множители.

Формулы сокращенного умножения.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Метод разложения на множители.

Формулы сокращенного умножения.

Решить уравнение

$$4 = 25(x^2 - 2x + 1)(x - 2)^2$$

$$2^2 = [5(x-1)(x-2)]^2,$$

$f(x) = 2$ и $g(x) = 5(x^2 - 3x + 2)$. Имеем

$$(2 - 5(x^2 - 3x + 2)) \cdot (2 + 5(x^2 - 3x + 2)) = 0 \Rightarrow$$
$$(-5x^2 + 15x - 8) \cdot (5x^2 - 15x + 12) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{65}}{10}.$$

$$\boxed{f^2(x) = g^2(x)}$$

$$\boxed{f^2(x) - g^2(x) = 0 \ \Rightarrow \ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0}$$

$$\boxed{f^2(x) = g^2(x) \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.}$$

Метод разложения на множители.

Теорема 3. Если в уравнении $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ***выполняется следующие зависимости между коэффициентами***

$$a+b=b+c+d=d+e,$$

то левая часть уравнения раскладывается на множители, одним из которых будет x^2-x+1, ***а второй находится делением левой части уравнения на*** x^2-x+1.

Метод разложения на множители.

Решить уравнение

$$2x^4+x^3-4x^2+6x-3=0.$$

$$a=2,\ b=1,\ c=-4,\ d=6,\ e=-3$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+x^3-4x^2+6x-3 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-2x^3+2x^2} & 2x^2+3x-3 \\
3x^3-6x^2+6x & \\
\underline{3x^3-3x^2+3x} & \\
-3x^2+3x-3 & \\
\underline{-3x^2+3x-3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Метод замены переменных.

Решить уравнение

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x^2+x-5 \neq 0. \\ x \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x \in R \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x-5}{x}=t,$$

$$t+\frac{3}{t}+4=0, t \neq 0 \qquad t_1=-3, t_2=-1.$$

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-3 \Rightarrow x_1=-5, x_2=1,$$

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-1 \Rightarrow x_{3,4}=-1 \pm \sqrt{6}.$$

Ответ: $x_1=-5, x_2=1, x_{3,4}=-1 \pm \sqrt{6}.$

Метод замены переменных.
Дробно-рациональная замена.

Решить уравнение

$$(x+6)(x+3)(x-1)(x-2)=12x^2$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$(x+6)(x-1)\cdot(x+3)(x-2)=12x^2$$

$$(x^2+5x-6)(x^2+x-6)=12x^2.$$

$$\left(x+5-\frac{6}{x}\right)\left(x+1-\frac{6}{x}\right)=12.$$

$$t=x+1-\frac{6}{x}$$

$$t(t+4)=12,$$

$$t^2+4t-12=0,$$

$$t_1=-6, t_2=2.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+1-\frac{6}{x}=-6 \\ x+1-\frac{6}{x}=2, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+7x-6=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2} \\ x_3=-2, x_4=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}, x_3=-2, x_4=3.$

Метод замены переменных.

Возвратно-симметрические уравнения.

Алгебраическое уравнение четвертой степени вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

при $e \neq 0$ называется возвратно-симметрическим, если коэффициенты уравнения, a, b, d, e связаны соотношениями

$$\frac{a}{e} = \left(\frac{b}{d}\right)^2,$$

или иначе

$$d = \lambda b, \qquad e = \lambda^2 a \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + \lambda bx + \lambda^2 a = 0$$

Метод замены переменных.
Возвратно-симметрические уравнения.

$$a\left(x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)+c=0$$

Вводим новую переменную по формуле

$$x+\frac{\lambda}{x}=y$$

$$x^2+2x\frac{\lambda}{x}+\frac{\lambda^2}{x^2}=y^2. \quad x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}=y^2-2\lambda$$

$$a\left(y^2-2\lambda\right)+by+c=0$$

Решить уравнение

$$4x^4-16x^3+7x^2-32x+16=0.$$

$$a=4,\ b=-16,\ c=7,\ d=-32,\ e=16$$

$$\frac{a}{e}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},\ \left(\frac{b}{d}\right)^2=\left(\frac{-16}{-32}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$4\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0.$$

$4\left(y^2-4\right)+16y+7=0$, или $4y^2-16y-9=0$.

Ответ: $x_1=4; x_2=\frac{1}{2}.$

Метод замены переменных.

Решение уравнений относительно коэффициентов.

Решить уравнение

$$4x^3 - 4\sqrt{5}x^2 + 5x - 2\sqrt{5} + 4 = 0. \qquad \sqrt{5} = a.$$

$$4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 2a + 4 = 0.$$

$$xa^2 - \left(4x^2 + 2\right)a + 4\left(x^3 + 1\right) = 0.$$

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1 - 4\left(x^3 + 1\right)x}}{x} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{x} =$$

$$= \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x-1)^2}}{x} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x-1)}{x}.$$

Метод замены переменных.

Решение уравнений относительно коэффициентов.

$$4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 2a + 4 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2x^2 + 2x}{x} \\ a = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x} \end{array}\right., \text{ т.е, } \left[\begin{array}{l} a = 2x + 2 \\ 2x^2 - (2 + a)x + 2 = 0 \end{array}\right..$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 2 - \sqrt{5} = 0 \\ 2x^2 - \left(2 + \sqrt{5}\right)x + 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{2} \\ x_{2,3} = \dfrac{2 + \sqrt{5} \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4} \end{array}\right..$$

Отв.: $x_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{2}$; $x_{2,3} = \dfrac{2 + \sqrt{5} \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{4}$.

Метод замены переменных.

Однородные рациональные уравнения.

$$au^{2\alpha}+bu^{\alpha}v^{\alpha}+cv^{2\alpha}=0,$$

где a, b, c, α – заданные (отличные от нуля) числа, $u=u(x), v=v(x)$ – некоторые функции от x. ,

$v^{2\alpha}\neq 0$

$$a\left(\frac{u}{v}\right)^{2\alpha}+b\left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha}+c=0,$$

$$t=\left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha}.$$

Метод замены переменных.

Однородные рациональные уравнения.

Решить уравнение

$$(2x^2-x+1)^2+x^2(2x^2-x+1)-6x^4=0.$$

$$\left(\frac{2x^2-x+1}{x^2}\right)^2+\frac{2x^2-x+1}{x^2}-6=0.$$

Обозначаем: $t=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2}$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t^2+t-6=0\Rightarrow t_1=-3, t_2=2.$$

$$\frac{2x^2-x+1}{x^2}=-3\Rightarrow \textit{нет корней}\,(D<0),$$

$$\frac{2x^2-x+1}{x^2}=2\Rightarrow x_1=1.$$

Ответ: $x=1$.

Метод замены переменных.

Дополнение до полного квадрата.

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab \text{ и } a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$$

. Решить уравнение $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=7.$

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+2x\frac{3x}{x+3}-7=0,$$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\frac{x^2}{x+3}-7=0.$$

Обозначим: $t=\dfrac{x^2}{x+3}$. Тогда имеем квадратное уравнение:

$$t^2+6t-7=0 \Rightarrow t_1=-7, t_2=1.$$

$$\frac{x^2}{x+3}=-7, x^2+7x+21=0 \Rightarrow \textit{нет корней}\,(D<0),$$

$$\frac{x^2}{x+3}=1, x^2+x-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$

Метод замены переменных.

Уравнения вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ и $(x+a)^5-(x+b)^5=c$

$$x=t-\frac{a+b}{2}$$

$$(x\pm a)^4=x^4\pm 4x^3a+6x^2a^2\pm 4xa^3+a^4,$$
$$(x\pm a)^5=x^5\pm 5x^4a+10x^3a^2\pm 10x^2a^3+5xa^4+a^5.$$

Решить уравнение

$$(x+3)^5-(x-1)^5=64. \qquad x=t-\frac{3-1}{2}=t-1.$$

$$(t-1+3)^5-(t-1-1)^5=64,$$

$$(t+2)^5-(t-2)^5=64, \qquad t^5+10t^4+40t^3+80t^2+80t+32-(t^5-10t^4+40t^3-80t^2+80t-32)=0,$$

Метод замены переменных.

Уравнения вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ **и** $(x+a)^5-(x+b)^5=c$

$$t^5+10t^4+40t^3+80t^2+80t+32-(t^5-10t^4+40t^3-80t^2+80t-32)=0,$$

$$20t^4+160t^2=0,$$

$$20t^2(t^2+8)=0,$$

$$20t^2=0, t=0 \Rightarrow x_{1,2}=-1,$$

$$t^2+8=0 \Rightarrow \text{решений нет}\,(t^2\geq 0\ \forall t).$$

Ответ: $x_{1,2}=-1.$

Функционально-графический метод

Утверждение 1. Если $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке X, то уравнение $f(x)=C$, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке X.

Утверждение 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на промежутке X функции, причем $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке X. В качестве промежутка X могут быть бесконечный промежуток $(-\infty;\infty)$, промежутки $(a;\infty)$, $(-\infty;a)$, $[a;\infty)$, $(-\infty;a]$, отрезки, интервалы и полуинтервалы.

АСОУ АКАДЕМИЯ СОЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЦНППМ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Функционально-графический метод

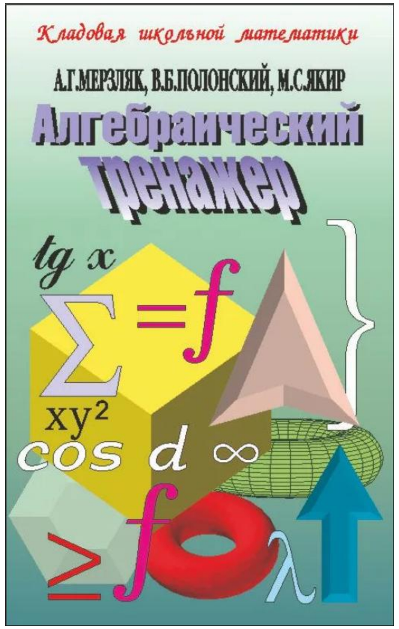
Использование монотонности функций

Решить уравнение

$$x^9 + 6x - 7 = 0.$$

ОДЗ: $x \in R$. Перепишем уравнение в виде:

$$x^9 = 7 - 6x.$$



Ответ: $x=1$.

Решить уравнение

$$x^5 + x^3 + 5x - 7 = 0.$$

$$x^5 + 5x = 7 - x^3.$$

Ответ: $x = 1$.

Задания для самостоятельного решения

АКАДЕМИЯ СОЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

$x^3-4x^2+x+6=0$ Отв.: -1; 2; 3.

$x^{38}+6x^{37}+11x^{36}+6x^{35}=0$ Отв.: $-1; -2; -3; 0.$

$x^4+x^3-x^2-7x-6=0$ Отв.: -1; 2.

$\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$ Отв.: ± 3.

$x^4+8x^3+16x^2-36=0$ Отв.: $-2\pm\sqrt{10}$.

$x^3+2\sqrt{7}x^2+7x+4\sqrt{7}+8=0$ Отв.: $-2-\sqrt{7}$.

$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$ Отв.: $\frac{-15\pm\sqrt{189}}{18}$.

$(2x-1)(x-2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$ Отв.: $-\frac{1}{2}; -2.$

$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$ Отв.: $\frac{1}{2}; \frac{7}{2}$.

$x^4+3x^3+4x^2+6x+4=0$ Отв.: -2; -1.

$x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$ Отв.: -2; -1; 2; 4.

$(2x-1)^2+(2x-1)(x+2)-2(x+2)^2=0$ Отв.: $-\frac{3}{4}; 3.$

$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=\frac{40}{9}$ Отв.: -1; 3; $\frac{11\pm\sqrt{55}}{11}$.

Спасибо
за
внимание!