Векторно – координатный метод решения стереометрических задач на ЕГЭ (№ 14)

Овсянкина Оксана Алексеевна

Учитель математики
МБОУ СОШ № 28
г. о. Мытищи

учитель будущего

В данном материале я попыталась собрать в единую систему методы решения заданий №14 (С2) ЕГЭ. Не секрет, что основные затруднения при решении подобных задач заключаются именно в незнании эффективных методов решения. Конечно, в большинстве случаев их можно решить и стандартными методами, но это сложно и занимает много времени.

Основные виды задач №14 (С2):

1. Угол между прямыми.
2. Угол между плоскостями
3. Угол между прямой и плоскостью
4. Расстояние от точки до прямой
5. Расстояние от точки до плоскости
6. Расстояние между скрещивающимися прямыми
7. Нахождение площади сечения
8. Нахождение объема многогранника

Существует два способа решения задач по стереометрии.
Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение.

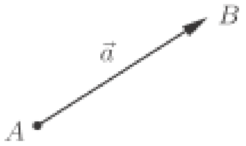
Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени до экзамена мало, а решить № 14 (С2) хочется.

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве – совокупность точки О (называемой *началом координат*), единицы измерения и трёх попарно перпендикулярных прямых Ox, Oy и Oz (называемых *осями координат: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат*), на каждой из которых указано направление положительного отсчёта. Плоскости xOy, yOz и zOx называют координатными плоскостями. Каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел, называемых её *координатами*.

Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец. Только в пространстве вектор задается тремя координатами x, y и z:

$$\vec{a}(x_a;\ y_a;\ z_a)$$

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости — из координаты конца вычитаем координату начала.



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ в пространстве — это расстояние между точками A и B. Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Перед решением стереометрических задач координатно-векторным методом стоит запомнить следующие формулы:

- **Нахождение расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.**

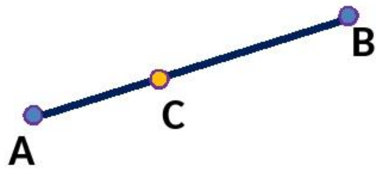
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ *, где d=AB, A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)*

- **Нахождение координаты середины *C(x; y; z)* отрезка *AB*,**

A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Деление отрезка в заданном отношении



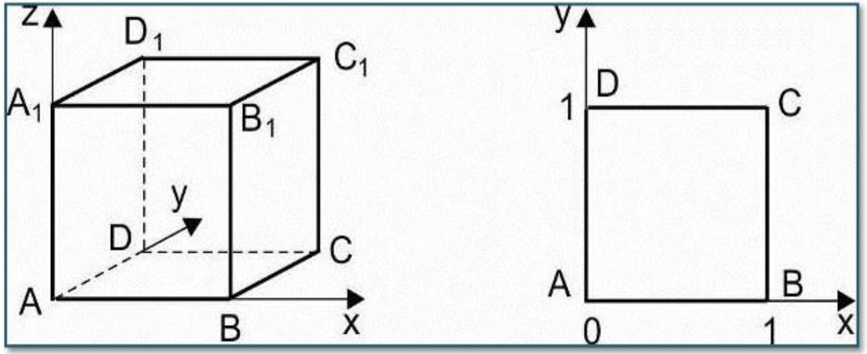
Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ являются концами отрезка АВ и точка С делит его так, что АС:СВ=m:n. Тогда координаты точки С вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{n \cdot x_1 + m \cdot x_2}{m+n} \qquad y_0 = \frac{n \cdot y_1 + m \cdot y_2}{m+n} \qquad z_0 = \frac{n \cdot z_1 + m \cdot z_2}{m+n}$$

Для решения задач необходимо научиться находить координаты вершин основных многогранников при помещении их в прямоугольную систему координат.

Ниже представлены координаты вершин некоторых *многогранников*, помещенных в систему координат.

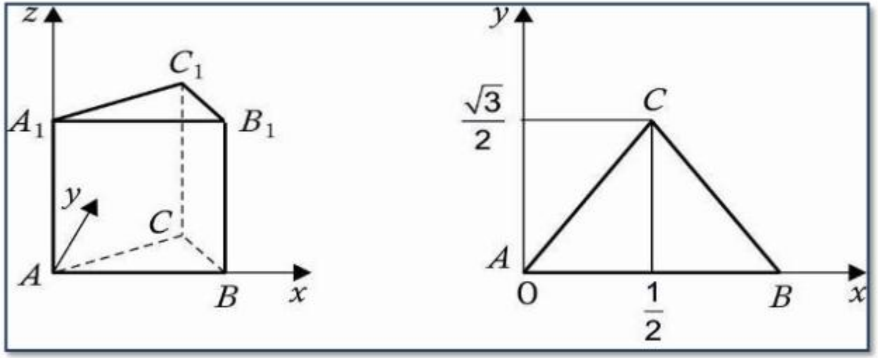
1. Единичный куб A...D_1



Координаты вершин:

A (0,0,0), A_1(0,0,1), B(1,0,0), B_1(1,0,1), D(0 ,1 ,0), D_1(0,1,1), C(1,1,0), C_1(1,1,1).

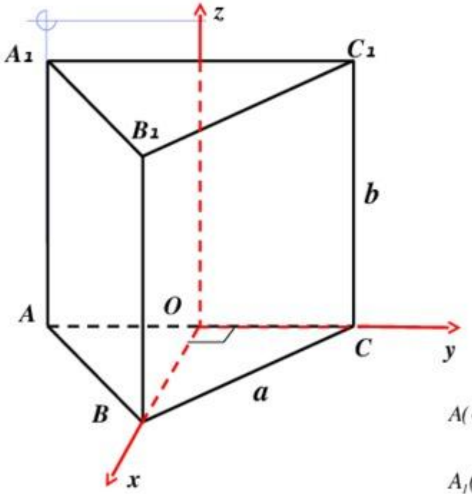
2. ***Правильная треугольная призма*** $A \ldots C_1$**, все ребра, которой равны 1.**

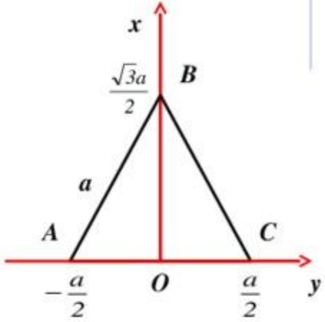


Координаты вершин:

A (0,0,0),A $_1$(0,0,1),B(1,0,0),B$_1$(1,0,1), C(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0),C$_1$(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,1).

Другой вариант расположения ***правильной треугольной призмы*** *относительно прямоугольной системы координат*

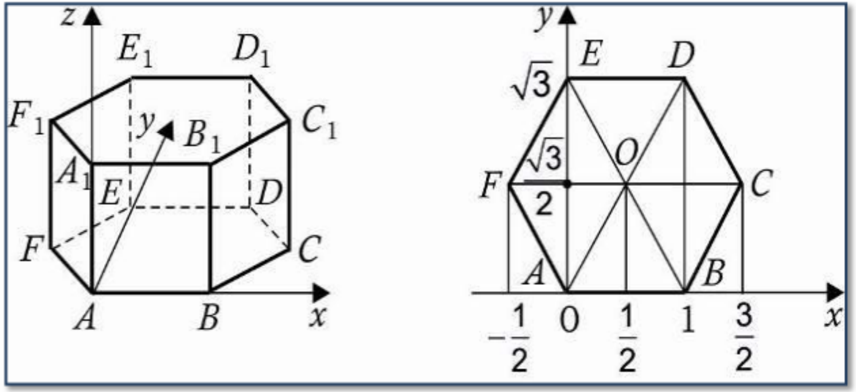




$A(0;-\frac{a}{2};0)$ $B(\frac{\sqrt{3}a}{2};0;0)$ $C(0;\frac{a}{2};0)$

$A_1(0;-\frac{a}{2};b)$ $B_1(\frac{\sqrt{3}a}{2};0;b)$ $C_1(0;\frac{a}{2};b)$

3. Правильная шестиугольная призма A...F$_1$, все ребра которой равны 1.

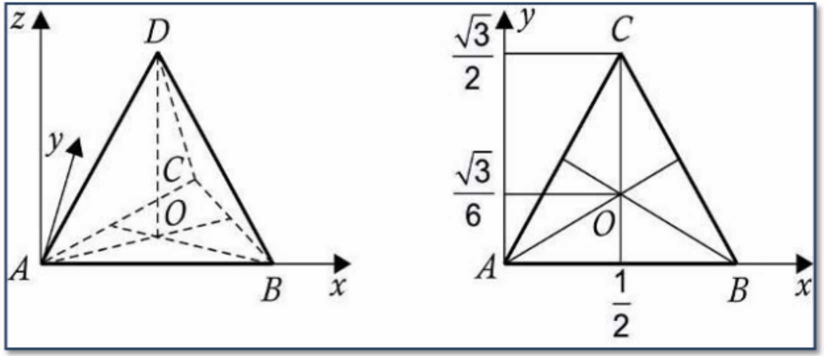


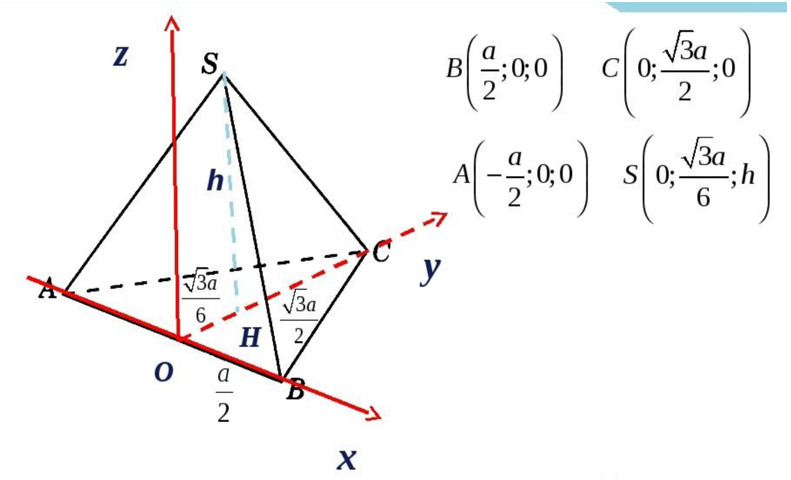
Координаты вершин:

A (0,0,0),A $_1$(0,0,1),B(1,0,0),B$_1$(1,0,1), C(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0),C$_1$(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,1),

D(1, $\sqrt{3}$, 0), D$_1$(1, $\sqrt{3}$, 1), E(0, $\sqrt{3}$, 0), E$_1$(0, $\sqrt{3}$, 1), F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0), F_1(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1).

4. Правильная треугольная пирамида (тетраэдр) ABCD все ребра которой равны 1.

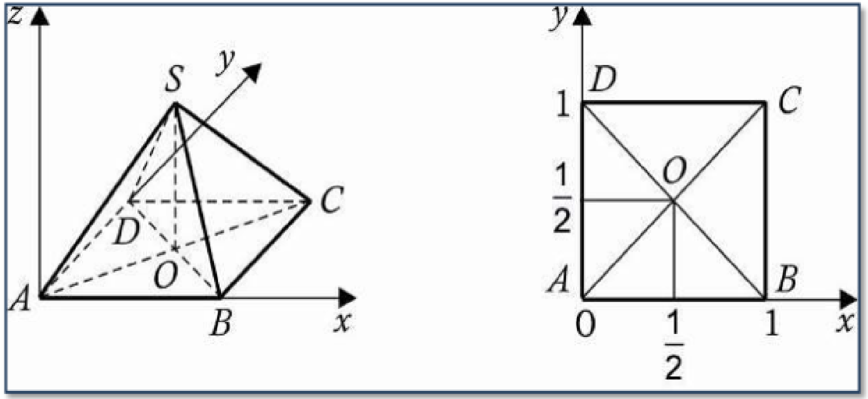




Координаты вершин:

A (0,0,0),B(1,0,0),C(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0), D(0,5, $\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$),

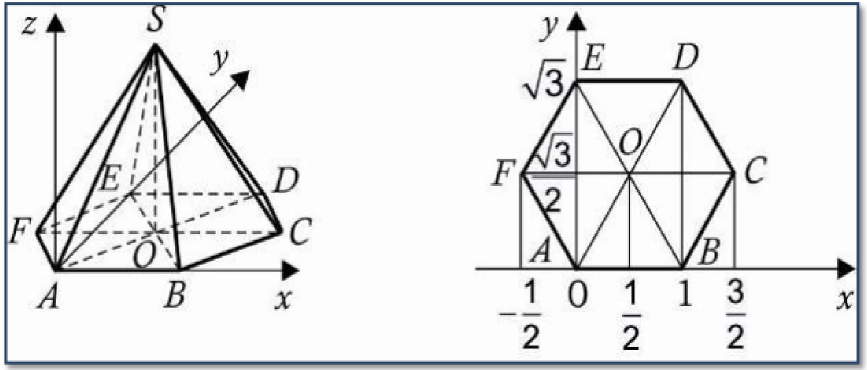
5. ***Правильная четырехугольная пирамида SABCD, все ребра которой равны 1.***



Координаты вершин:

A (0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0), D(0,1,0), S(0,5;0,5;$\frac{\sqrt{2}}{2}$).

6. ***Правильная шестиугольная пирамида SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2.***

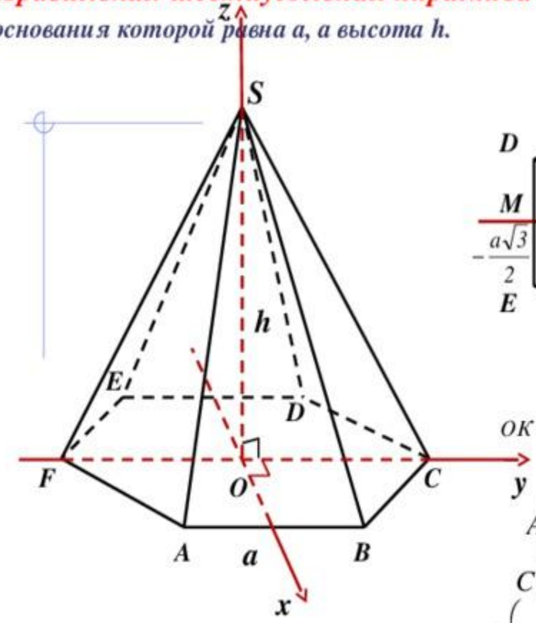


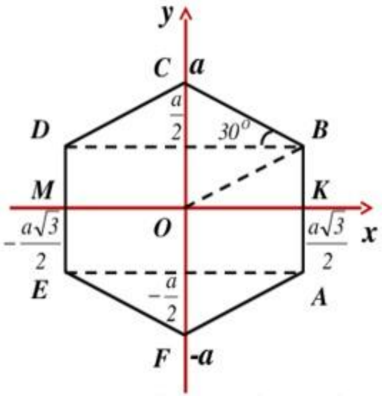
Координаты вершин:

A (0,0,0), B(1,0,0),C(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0), D(1, $\sqrt{3}$, 0), E(0, $\sqrt{3}$, 0), F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0),

S(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$).

Правильная шестиугольная пирамида SABCDEF, сторона основания которой равна a, а высота h.





$$OK = r = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a}{2tg30^\circ} = \frac{a}{2\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$,

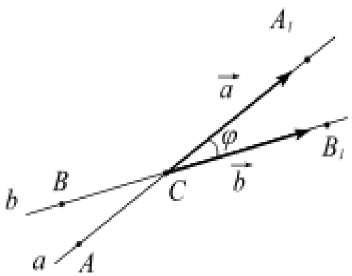
$C(0;a;0)$, $F(0;-a;0)$, $S(0;0;h)$,

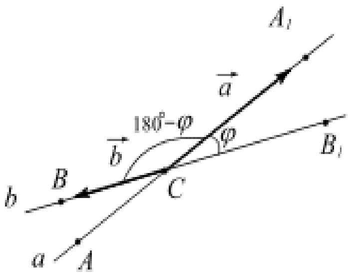
$D\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $E\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right)$

Рассмотрим первый вид задачи:

Угол между скрещивающимися прямыми. Косинус угла φ ($0 \le \varphi \le 90°$) между прямыми a и b определяется по формуле:

$$\cos\varphi = |\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{|(\vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$ где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы, коллинеарные прямым a и b (см. рис. 8а и 8б).

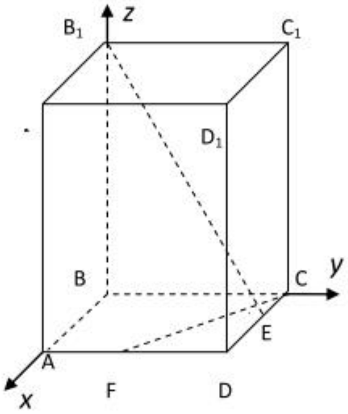




Алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми:

1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора)
2. Вписываем фигуру в систему координат
3. Находим координаты концов векторов
4. Находим координаты Векторов
5. Подставляем в формулу "косинус угла между векторами"
6. После чего (если требуется в задаче), зная косинус, находим значение самого угла.

Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота — 4. Точка E — середина отрезка CD, точка F — середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми CF и B_1E.



Решение.

Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

Выпишем координаты точек B_1, E, C, F в этой системе координат:

$B_1\,(0;\,0;\,4)$, $E(1;\,2;\,0)$, $C(0;\,2;\,0)$,
$F\,(2;\,1;\,0)$.

Тогда $\overrightarrow{CF}\,(2;\,-1;\,0)$, $\overrightarrow{B_1E}\,(1;\,2;\,-4)$. Найдём угол между этими векторами по формуле:

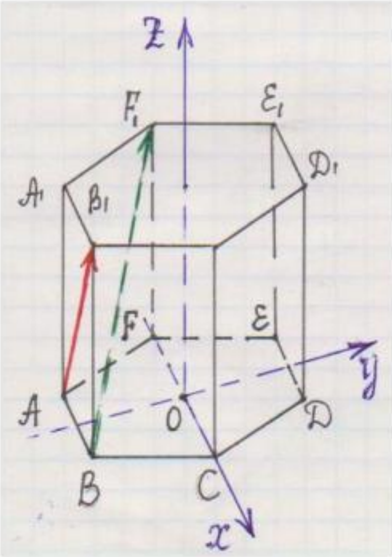
$$\cos(\widehat{\bar a,\ \bar b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot(-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$$

То есть искомый угол α=90°.

Ответ: 90°.

. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BF_1.



Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке.

Тогда $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),$

$B_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), F_1(-1; 0; 1),$

$\overrightarrow{AB_1}\{1; 0; 1\}, \overrightarrow{BF_1}\left\{-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$

Отсюда $\cos\varphi = |\cos\varphi| = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BF_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{BF_1}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$,

где φ — искомый угол.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$.

учитель будущего

Угол между плоскостями. Пусть в декартовой системе координат плоскости α и β (см. рис. 12) заданы уравнениями:

$\alpha: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\beta: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Вектора нормалей плоскостей имеют координаты $\vec{n}_\alpha = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{A_2; B_2; C_2\}$. Тогда угол φ между плоскостями α и β (см. рис. 13) определяется формулой:

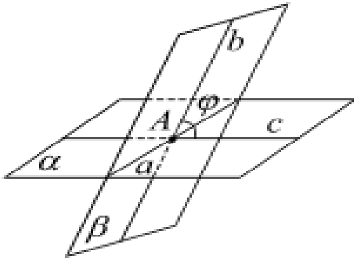
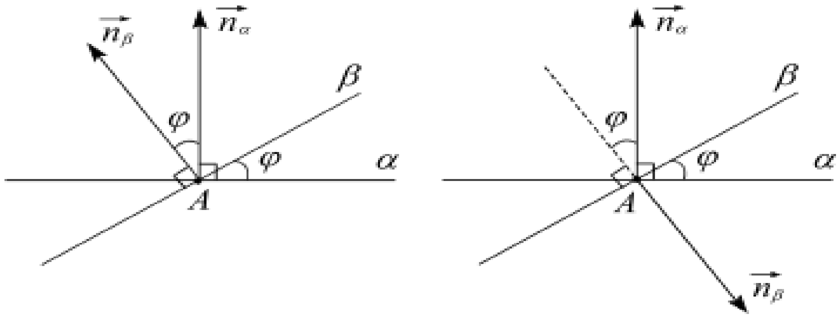


Рис. 12

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{|(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (***)$$



Так же нужно понять, что вектор нормали к плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ имеет координаты $\vec{n}\{A;B;C\}$

Для составления уравнения плоскости можно использовать определитель третьего порядка, который можно посчитать правилом Саррюса.

Итак, допустим у нас есть плоскость проходящая через точки

$$M_1(x_1;y_1;z_1) \quad M_2(x_2;y_2;z_2) \quad M_3(x_3;y_3;z_3)$$

Уравнение этой плоскости в координатной форме будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

Ниже представлено, как найти определитель третьего порядка по правилу Саррюса, составить уравнение плоскости и найти вектор нормали.

Например

A(0;0;0), К(0;1;0,5), В(1;0;1)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0.5-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-0 & y-0 \\ 0-0 & 1-0 \\ 1-0 & 0-0 \end{matrix} =$$

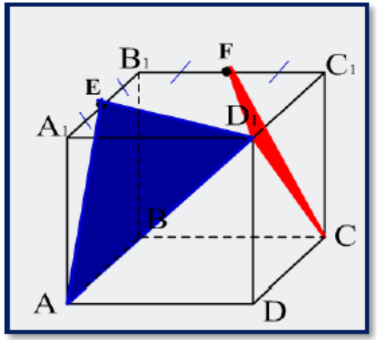
$= (x-0)(1-0)(1-0)+(y-0)(0.5-0)(1-0)+(z-0)(0-0)(0-0)-(z-0)(1-0)(1-0)-(x-0)(0.5-0)(0-0)-(y-0)(0-0)(1-0)=$ **x+0.5y-z**

x+0.5y-z=0 - уравнение плоскости (АКВ). Вектор нормали $\overline{n}$ (1;0,5;-1)

В единичном кубе A...D1 найдите угол между (AD1E) и (D1FC), где E и F середины ребер A1B1 и B1C1 соответственно.

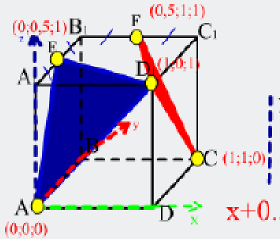
учитель будущего

Решение.



Впишем куб в прямоугольную систему координат и определим координаты точек, задающих указанные плоскости.

Составим уравнения плоскостей и найдем координаты векторов нормалей к ним:



(FD1C): F(0,5;1;1), D1(1;0;1), C(1;1;0)

$$\begin{vmatrix} x-0.5 & y-1 & z-1 \\ 1-0.5 & 0-1 & 1-1 \\ 1-0.5 & 1-1 & 0-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-0.5 & y-1 \\ 1-0.5 & 0-1 \\ 1-0.5 & 1-1 \end{matrix}$$

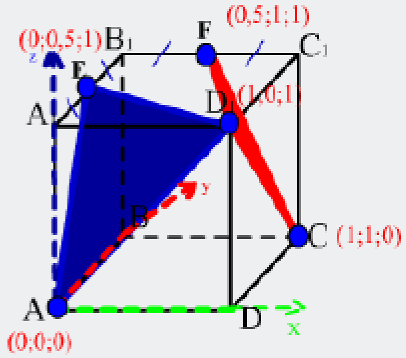
x+0.5y+0.5z-1.5=0 - ур-е плоскости (FD1C). $\rightarrow \overline{n}(1;0,5;0,5)$

(AED1): A(0;0;0), E(0;0,5;1), D1(1;0;1)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 0,5-0 & 1-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-0 & y-0 \\ 0-0 & 0,5-1 \\ 1-0 & 0-0 \end{matrix}$$

0.5x+y-0.5z=0 - ур-е плоскости (AED1) $\rightarrow \overline{m}(0.5;1;-0,5)$

Найдем косинус угла между плоскостями



(FD1C): F(0,5;1;1), D1(1;0;1),

C(1;1;0)

$\overline{n}$ (1;0,5;0,5)

(AED1): A(0;0;0),

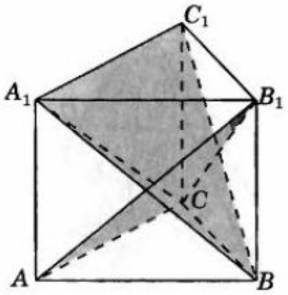
E(0;0,5;1), D1(1;0;1)

$\overline{m}$ (0.5;1;-0,5)

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = 0{,}5$$

$\longrightarrow$ угол = 60

3.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.



1) Координаты A(0,0,0), B_1(1,0,1), C($\frac{1}{2}$;$\frac{\sqrt{3}}{2}$;0), найдем уравнение плоскости (AB_1C).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 0{,}5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости:

$\frac{\sqrt{3}}{2}$x- $\frac{1}{2}$y − $\frac{\sqrt{3}}{2}z$=0 т.е $\sqrt{3}$x-y-$\sqrt{3}\,z = 0$

координаты вектора нормали $\vec{n}(\sqrt{3};-1;-\sqrt{3})$

2). Координаты A_1(0,0,1), B (1,0,0), C_1 ($\frac{1}{2}$;$\frac{\sqrt{3}}{2}$;1),

найдем уравнение плоскости (A_1BC_1).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0{,}5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 1-1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости:

-$\frac{\sqrt{3}}{2}$x- $\frac{1}{2}$y − $\frac{\sqrt{3}}{2}z$+$\frac{\sqrt{3}}{2}$=0, т. е $\sqrt{3}$x+y+$\sqrt{3}\,z+\sqrt{3} = 0$

координаты вектора нормали

$\vec{m}(\sqrt{3};1;\sqrt{3})$ и $\vec{n}(\sqrt{3};-1;-\sqrt{3})$

3). Найдем косинус угла между плоскостями (AB_1C) и (A_1BC_1):

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1\cdot1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}|}{|\sqrt{3+1+3}|\cdot|\sqrt{3+1+3}|}=\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

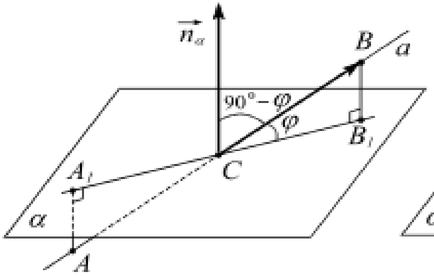
учитель будущего

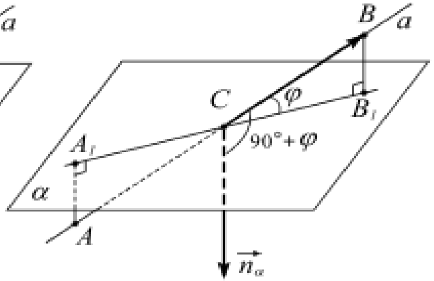
Угол между прямой и плоскостью. Пусть в пространстве введена декартова система координат, и плоскость α задана уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, тогда вектор нормали плоскости $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

Пусть задан направляющий вектор прямой a: $\vec{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$. Тогда

синус угла φ между прямой и плоскостью определяется формулой (см. рис. 10):

$$\sin\varphi = |\cos\angle(a,\alpha)| = \frac{|(\vec{n},\vec{q})|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{|A\cdot q_1 + B\cdot q_2 + C\cdot q_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}. \quad (**)$$

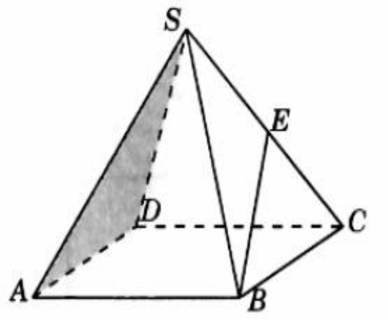


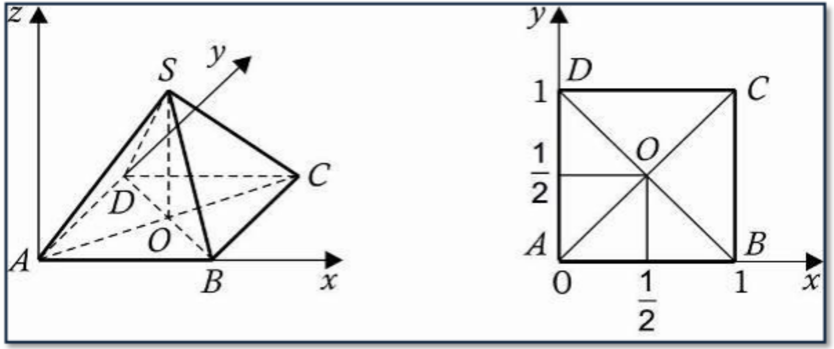


Алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью:

1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямую и плоскость (прямой придаем направление, т.е. вектор)
2. Вписываем фигуру в систему координат
3. Находим координаты концов направляющего вектора.
4. Находим координаты вектора (рассмотрено ранее)
5. Находим координаты вектора нормали к плоскости(рассмотрено ранее)
6. Подставляем в формулу "синус угла между прямой и плоскостью"
7. После чего (если требуется в задаче), зная синус, находим значение самого угла.

2.3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E — середина ребра SC.





1) Координаты точек B (1,0,0), E $(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$; вектора $\overrightarrow{BE}$ $(\frac{-1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$.

2) Составим уравнение плоскости (ADS), учитывая, что A(0,0,0), D(0,1,0), S$(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \\ 0{,}5-0 & 0{,}5-0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости:

$\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{2}z=0$, координаты вектора нормали $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{2})$;

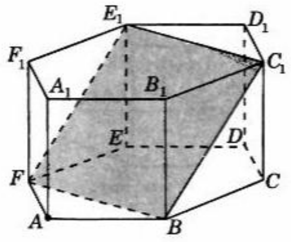
$$\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\left|-\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right|}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+\frac{2}{16}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{3};$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Расстояние от точки $M(x_M; y_M; z_M)$ ***до плоскости*** α, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, может быть вычислено по формуле: $\rho(M, \alpha) = \dfrac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Расстояние между параллельными плоскостями α_1 и α_2 ($\alpha_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $\alpha_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$) вычисляется по формуле: $\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

5.3. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.



Решение.

1) Координаты вершин: A (0,0,0), B(1,0,0), $E_1(0, \sqrt{3}, 1)$, F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0), найдем уравнение плоскости (E_1BF).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & \sqrt{3}-0 & 1-0 \\ -0{,}5-1 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ -1{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости:

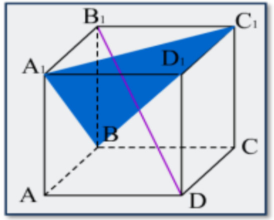
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (X-1) -1,5y + $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1{,}5\cdot\sqrt{3}\right)\cdot z$=0 т.е $\frac{\sqrt{3}}{2}$x-1,5y +$\sqrt{3}z-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$, значит координаты вектора нормали $\vec{n}(\sqrt{3}; -3; 2\sqrt{3})$.

3) Найдем расстояние от точки А до плоскости(A_1BD)

$$\rho=\frac{|A_0\cdot x+B_0\cdot y+C_0\cdot z+D_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|\sqrt{3}\cdot 0-3\cdot 0+2\sqrt{3}\cdot 0-\sqrt{3}|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-3)^2+(2\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

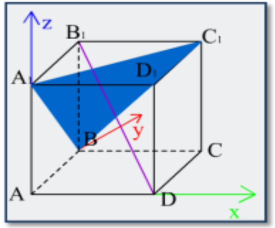
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена диагональ B_1D. В каком отношении, считая от вершины B_1, плоскость A_1BC_1 делит диагональ B_1D?

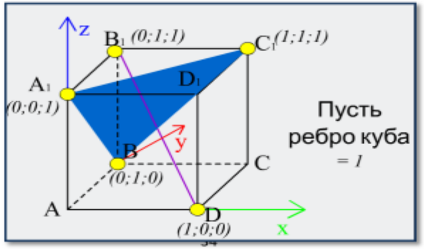


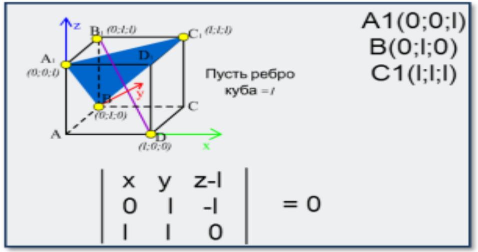
Решение.

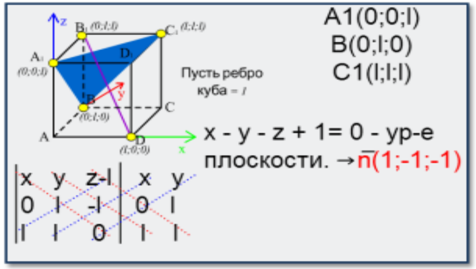
Впишем куб в систему координат как показано на рисунке.



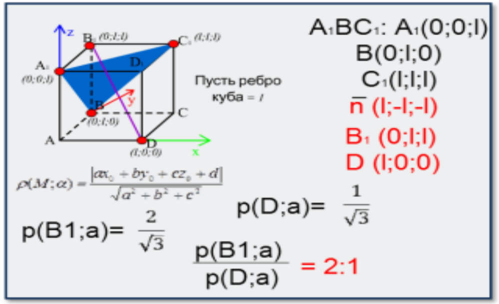
Найдем координаты точек. Составим уравнение плоскости.







Найдем расстояние от точек до плоскости.

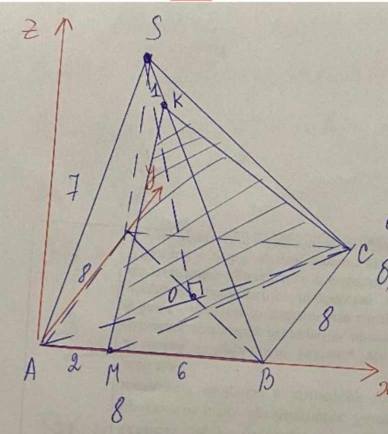


Ответ: 2:1

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.



Дано: $SABCD$ – правильная 4-я пирамида

$AB=8$, $SA=7$

$AM=2$; $SK=1$

а) Доказать: $(CKM)\perp(ABC)$

б) Найти: V_{BCKM}

а) Введём прямоугольную систему координат.

$A(0;0;0)$; $B(8;0;0)$; $C(8;8;0)$

Составим уравнение плоскости (ABC):

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 8-0 & 0-0 & 0-0 \\ 8-0 & 8-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 0x - 0y + 1z = 0$$

$\vec{n}_1\{0;0;1\}$; $d=0$

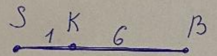
SO – высота пирамиды

ΔASO – прямоугольный

$AC = 8\sqrt{2} \Rightarrow AO = 4\sqrt{2}$

$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2}$

$SO = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{49-32} = \sqrt{17}$



$S(4;4;\sqrt{17})$; $B(8;0;0)$

$$K\left(\frac{6\cdot 4+1\cdot 8}{7};\ \frac{6\cdot 4+1\cdot 0}{7};\ \frac{6\cdot\sqrt{17}+1\cdot 0}{7}\right)$$

$K\left(\frac{32}{7};\ \frac{24}{7};\ \frac{6\sqrt{17}}{7}\right)$; $M(2;0;0)$;

$C(8;8;0)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ \frac{18}{7} & \frac{24}{7} & \frac{6\sqrt{17}}{7} \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ \frac{18}{7} & \frac{24}{7} & \frac{6\sqrt{17}}{7} \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$4x - 3y - 0\cdot z - 8 = 0$

$\vec{n}_2\{4; -3; 0\}$; $d = -8$

$$\cos(\widehat{CKM; ABC}) = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} =$$

$$= \frac{|0\cdot 4+0\cdot(-3)+1\cdot 0|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{0}{5} = 0$$

$\angle(CKM; ABC) = 90^\circ \Rightarrow (CKM) \perp (ABC)$

б) $V_{BCKM} = \frac{1}{3} S_{\Delta BCM}\cdot H$

H пирамиды $= \rho(K;(ABC))$ – это расстояние от точки K до плоскости (ABC)

$$\rho(K;(ABC)) = \frac{|x_K\cdot 0+y_K\cdot 0+z_K\cdot 1+0|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} =$$

$$= \frac{\left|\frac{32}{7}\cdot 0+\frac{24}{7}\cdot 0+\frac{6\sqrt{17}}{7}\cdot 1\right|}{1} = \frac{6\sqrt{17}}{7}$$

$S_{BCM} = \frac{1}{2}\cdot BM\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$

$V_{BKCM} = \frac{1}{3}\cdot 24\cdot\frac{6\sqrt{17}}{7} = \frac{48\sqrt{17}}{7}$.

Ответ: $\frac{48\sqrt{17}}{7}$

Расстояние между скрещивающимися прямыми можно находить, используя смешанное произведение. Так как они скрещиваются, их направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ и вектор

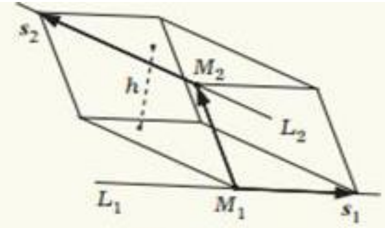


Рис. 6.7

$\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точки на прямых, некомпланарны. Поэтому на них можно построить параллелепипед (рис. 6.7). Тогда расстояние между прямыми равно высоте h этого параллелепипеда. В свою очередь, высоту параллелепипеда можно вычислить как отношение объема параллелепипеда к площади его основания. Объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения трех указанных векторов, а площадь параллелограмма в основании параллелепипеда равна модулю векторного произведения направляющих векторов прямых. В результате получаем формулу для расстояния $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{s}_2 \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}.$$

Алгоритм нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми

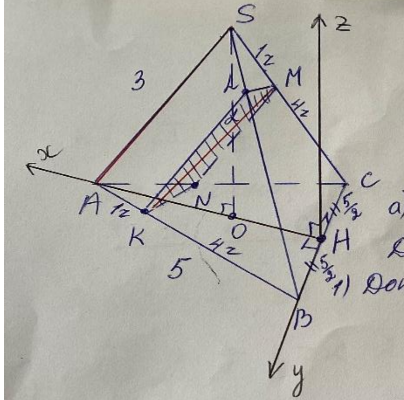
1. Взять систему координат.
2. Найти координаты векторов: $\overrightarrow{q_1} = \{x_1; y_1; z_1\}$; $\overrightarrow{q_2} = \{x_2; y_2; z_2\}$; - на скрещивающихся прямых, $\overrightarrow{m} = \{x_3; y_3; z_3\}$-начало вектора на одной и конец на другой из скрещивающихся прямых.
3. Найти : $\vec{c} = \overrightarrow{q_1} \cdot \overrightarrow{q_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \{x; y; z\}$
4. Вычислить длину этого вектора: $|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. Найти модуль смешанного произведения векторов $\overrightarrow{q_1}; \overrightarrow{q_2}; \overrightarrow{m}$: $s = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
6. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми: $d = \frac{|s|}{|\vec{c}|}$.
7. Ответ. d.

учитель будущего

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB=SM:MC=1:4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1:4$, считая от вершины A.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.



Дано: $SABC$ – правильн. △ пирам.,
$AB=5$, $SA=3$,
$K \in AB$; $M \in SC$;
$AK:KB=SM:MC=1:4$
$KM \in \alpha$; $\alpha \parallel SA$

а) Доказать: $AN:NC=1:4$

Доказательство:

1) Доп. постр.: $KL \parallel AS$; $KL \cap SB = L$; $MN \parallel AS$; $MN \cap AC = N$; LM; KN.

$\Downarrow$

$(KLM)=\alpha$

2) $SA \in (SAC)$, $\alpha \parallel SA$, $\alpha \cap (SAC) = MN$ $\Big| \Rightarrow MN \parallel SA$ (по обратной теореме о ∥ прямой и плоск.)

3) $SA \parallel MN$, $SM:MC=1:4$ $\Big| \Rightarrow AN:NC=1:4$ (по теор. Фалеса)

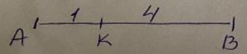
б) Найти расстояние м/у прямыми SA и KM?!

Введём прямоугольную систему координат.

$\triangle AHB$: $AH=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{25-\frac{25}{4}}=\sqrt{25\cdot\frac{3}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$; $B\left(0; \frac{5}{2}; 0\right)$.

Найдём координаты точки K с помощью формулы: „Деление отрезка в заданном отношении."



$$K\left(\frac{4\cdot\frac{5\sqrt3}{2}+1\cdot 0}{1+4};\ \frac{4\cdot 0+1\cdot\frac{5}{2}}{1+4};\ \frac{4\cdot 0+1\cdot 0}{1+4}\right)$$

$$K\left(2\sqrt3;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$$

Аналогично, координаты точки M.

S 1 M 4 C

$$C\left(0;\ -\frac{5}{2};\ 0\right).$$

$$\frac{AO}{OH}=\frac{2}{1}$$ (т.к. AH– медиана $\triangle ABC$)

$$\frac{AO}{AH}=\frac{2}{3} \Rightarrow AO=\frac{2}{3}AH;\ OH=\frac{1}{3}AH$$

$$AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{5\sqrt3}{2}=\frac{5\sqrt3}{3},\quad OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt3}{2}=\frac{5\sqrt3}{6}$$

$$SO=\sqrt{AS^2-AO^2};\ SO=\sqrt{3^2-\left(\frac{5\sqrt3}{3}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{75}{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt6}{3}$$

$$S\left(\frac{5\sqrt3}{6};\ 0;\ \frac{\sqrt6}{3}\right)$$

$$M\left(\frac{4\cdot\frac{5\sqrt3}{6}+1\cdot 0}{1+4};\ \frac{4\cdot 0+1\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{1+4};\ \frac{4\cdot\frac{\sqrt6}{3}+1\cdot 0}{1+4}\right)$$

$$M\left(\frac{2\sqrt3}{3};\ -\frac{1}{2};\ \frac{4\sqrt6}{15}\right)$$

$$\overrightarrow{KM}\left\{-\frac{4\sqrt3}{3};\ -1;\ \frac{4\sqrt6}{15}\right\};\quad \overrightarrow{AS}\left\{-\frac{5}{3}\sqrt3;\ 0;\ \frac{\sqrt6}{3}\right\}$$

$$\overrightarrow{KM}\left\{\frac{2\sqrt3}{3}-2\sqrt3;\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2};\ \frac{4\sqrt6}{15}-0\right\}$$

$$\overrightarrow{KM}\left\{-\frac{4\sqrt3}{3};\ -1;\ \frac{4\sqrt6}{15}\right\}$$

$$\overrightarrow{AS}\left\{\frac{5\sqrt3}{6}-\frac{5\sqrt3}{2};\ 0-0;\ \frac{\sqrt6}{3}-0\right\}$$

$$\overrightarrow{AS}\left\{-\frac{10\sqrt3}{6};\ 0;\ \frac{\sqrt6}{3}\right\};\quad \overrightarrow{AS}\left\{-\frac{5\sqrt3}{3};\ 0;\ \frac{\sqrt6}{3}\right\}$$

$$\overrightarrow{AK}\left\{2\sqrt3-\frac{5\sqrt3}{2};\ \frac{1}{2}-0;\ 0-0\right\};\quad \overrightarrow{AK}\left\{-\frac{\sqrt3}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right\}$$

$$\left(\overrightarrow{AS}\times\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{AK}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{5\sqrt3}{3} & 0 & \frac{\sqrt6}{3}\\ -\frac{4\sqrt3}{3} & -1 & \frac{4\sqrt6}{15}\\ -\frac{\sqrt3}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

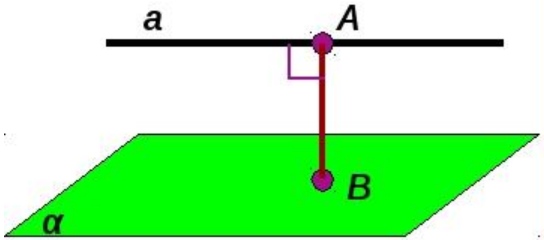
$(\overrightarrow{AS}\times\overrightarrow{KM})$:

$$\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -\frac{5\sqrt3}{3} & 0 & \frac{\sqrt6}{3}\\ -\frac{4\sqrt3}{3} & -1 & \frac{4\sqrt6}{15}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt6}{3}\vec i+\frac{5\sqrt3}{3}\vec k$$

$$\rho=\frac{\left|-\frac{\sqrt2}{2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt6}{3}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt3}{3}\right)^2}}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{3}=\frac{\sqrt2}{6}$$

Ответ: $\frac{\sqrt2}{6}$

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью

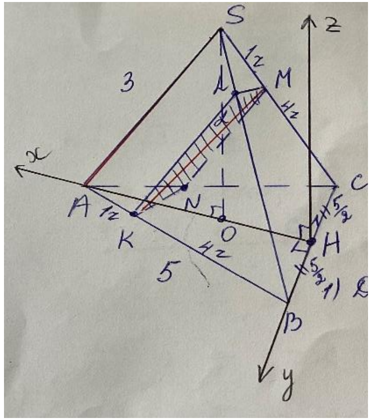


Все точки прямой равноудалены от плоскости. ***Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.***

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB=SM:MC=1:4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1:4$, считая от вершины A.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.



б) Найти расстояние между прямыми SA и KM?

$SA \parallel \alpha \Rightarrow \rho(SA; KM) = \rho(A; \alpha)$.

$\alpha = (KML) = (KMN)$

$K\left(2\sqrt{3}; \frac{1}{2}; 0\right)$; $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{4\sqrt{6}}{15}\right)$

$MN \parallel SA \Rightarrow \frac{SM}{MC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{4}$

A 1 N 4 C

$C\left(0; -\frac{5}{2}; 0\right)$

$A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$

$$N\left(\frac{1\cdot 0 + 4\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5}; \frac{1\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+4\cdot 0}{5}; \frac{1\cdot 0+4\cdot 0}{5}\right)$$

$N\left(2\sqrt{3}; -\frac{1}{2}; 0\right)$

Если посмотреть на плоскость Oxy, то заметим, что точки N и K симметричны относительно оси Ox.

Составим уравнение плоскости (KMN)

$$\begin{vmatrix} x-2\sqrt{3} & y-\frac{1}{2} & z \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{4\sqrt{6}}{15} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sqrt{6}\,x + 0y - 6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\,z = 0$$

$$\vec{n}\{\sqrt{6};\ 0;\ 5\sqrt{3}\};\quad d = -6\sqrt{2};\quad A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$$

$$h = \frac{\left|\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{6} + 0\cdot 0 + 5\sqrt{3}\cdot 0 - 6\sqrt{2}\right|}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (5\sqrt{3})^2}}$$

$$h = \frac{3\sqrt{2}}{2} : 9 = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Мнения о методе координат

(орфография, пунктуация и лексика авторов сохранена)

Очень – очень советую освоить координатный, вряд ли будет что-то такое, что координатным не решить! Меня км спасал не один раз. (Пользователь esclade279. Форум http://abiturient.pro)

Чтобы успешно решить С2, нужно разобраться в одном универсальном способе: - координатный способ. Все длины, углы легко находятся. - бывший абитуриент, ныне студент (Пользователь delpaNz. Форум http://abiturient.pro)

Ребят, решайте координатным методом С2! Так без особых знаний можно решить почти любую задачу.(Пользователь 777Julia777 http://forum.postupim.ru)

А почему бы учителям не научить абитуру считать определители 3-го порядка? Тогда задача на нахождение расстояния от точки до прямой и мкжду прямыми из суперсложной и недоступной многим геометрической задачи становится простой арифметической задачкой, где главное – не наврать в счете. Конечно, ваше учительское сердце протестует против этого, стремясь всех научить геометрическим методам, но результат +2 балла все таки наиболее вероятен во втором случае. Да и в универе нет чистой геометрии, только аналитическая.(Пользователь Марина http://www.alexlarin.com)


Удачи!!!
Успехов!!!
Уверенности
в себе и в свои возможности!!!

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!

учитель будущего