

Материалы для отработки темы «Уравнения»

1. Задача на движение

Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта B вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?	Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению — в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл S км, то катер — в 3 раза больше, т. е. $3S$ км. После встречи катер пройдет $3S$ км, а плот — в 5 раз меньше, т. е. $\frac{3S}{5}$ км. Всего плот пройдет $S + \frac{3S}{5} = \frac{8S}{5}.$ Отношение пройденного плотом пути ко всему пути $\frac{\frac{8S}{5}}{4S} = \frac{2}{5}.$ равно																
Расстояние между пристанями A и B равно 80 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 2 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 22 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.	Пусть искомая скорость равна v км/ч, $v > 2$. Составим таблицу по данным задачи: <table><tr><th></th><th>Скорость, км/ч</th><th>Время, ч</th><th>Расстояние, км</th></tr><tr><td>Плот</td><td>2</td><td>11</td><td>22</td></tr><tr><td>Яхта по пути туда</td><td>$v + 2$</td><td>$\frac{80}{v + 2}$</td><td>80</td></tr><tr><td>Яхта по пути обратно</td><td>$v - 2$</td><td>$\frac{80}{v - 2}$</td><td>80</td></tr></table> Так как лодка вышла на 2 часа позже плота, можно составить уравнение:		Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км	Плот	2	11	22	Яхта по пути туда	$v + 2$	$\frac{80}{v + 2}$	80	Яхта по пути обратно	$v - 2$	$\frac{80}{v - 2}$	80
	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км														
Плот	2	11	22														
Яхта по пути туда	$v + 2$	$\frac{80}{v + 2}$	80														
Яхта по пути обратно	$v - 2$	$\frac{80}{v - 2}$	80														

	$\frac{80}{v+2} + \frac{80}{v-2} = 9 \Leftrightarrow_{v>2} 80v - 160 + 80v + 160 = 9v^2 - 36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9v^2 - 160v - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{2}{9}, \\ v = 18 \end{cases} \Leftrightarrow_{v>0} v = 18.$ Таким образом, скорость яхты в неподвижной воде равна 18 км/ч. Ответ: 18 км/ч.																
Расстояние между пристанями А и В равно 126 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 34 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.	Обозначим искомую скорость (в км/ч) за $v, v > 2$. Составим таблицу по данным задачи: <table><tr><th></th><th>Скорость, км/ч</th><th>Время, ч</th><th>Расстояние, км</th></tr><tr><td>Плот</td><td>2</td><td>17</td><td>34</td></tr><tr><td>Яхта по пути туда</td><td>$v + 2$</td><td>$\frac{126}{v+2}$</td><td>126</td></tr><tr><td>Яхта по пути обратно</td><td>$v - 2$</td><td>$\frac{126}{v-2}$</td><td>126</td></tr></table> Так как яхта вышла на 1 час позже плота, можно составить уравнение: $\frac{126}{v+2} + \frac{126}{v-2} = 16 \Leftrightarrow_{v>2} 126v - 252 + 126v + 252 = 16v^2 - 64 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 8v^2 - 126v - 32 = 0 \Leftrightarrow_{v>2} v = 16.$ Ответ: 16 км/ч.		Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км	Плот	2	17	34	Яхта по пути туда	$v + 2$	$\frac{126}{v+2}$	126	Яхта по пути обратно	$v - 2$	$\frac{126}{v-2}$	126
	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км														
Плот	2	17	34														
Яхта по пути туда	$v + 2$	$\frac{126}{v+2}$	126														
Яхта по пути обратно	$v - 2$	$\frac{126}{v-2}$	126														
Туристы проплыли на лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, погуляв 2 часа, вернулись обратно через 6 часов от начала путешествия. На какое расстояние от лагеря они отплыли, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?	Пусть S км — расстояние, на которое от лагеря отплыли туристы. Зная, что скорость течения реки — 3 км/ч, а скорость лодки — 6 км/ч, найдём, что время, за которое они проплыли $\frac{S}{6-3} + \frac{S}{6+3}$ ч. Учитывая, что туда и обратно, составляет $\frac{S}{6-3} + \frac{S}{6+3}$ ч. Учитывая, что они были на стоянке 2 часа и вернулись через 6 часов после отплытия можно составить уравнение: $\frac{S}{3} + \frac{S}{9} + 2 = 6.$ Отсюда $S = 9$ км. Ответ: 9 км.																
Теплоход проходит по течению реки до пункта	Пусть x км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде.																

назначения 165 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 18 часов после отплытия из него	тогда $x + 4$ км/ч — скорость теплохода по течению, $x - 4$ км/ч — скорость теплохода против течения. По течению теплоход движется $\frac{165}{x + 4}$ часов, а против течения $\frac{165}{x - 4}$ часов, весь путь занял $18 - 5 = 13$ часов, составим уравнение: $\frac{165}{x + 4} + \frac{165}{x - 4} = 13 \Leftrightarrow \frac{165(x - 4) + 165(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} = 13 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 330x = 13x^2 - 16 \cdot 13 \Leftrightarrow 13x^2 - 330x - 208 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{13}, \\ x = 26. \end{cases}$ Корень $-\frac{8}{13}$ не подходит по условию задачи, следовательно, скорость теплохода равна 26 км/ч. Ответ: 26.
---	--

2. Задача на работу

Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 ч. Если первый оператор будет работать 3 ч, а второй 12 ч, то они выполнят только 75% всей работы. За какое время может набрать весь текст каждый оператор, работая отдельно?	Пусть первый оператор может выполнить данную работу за x часов, а второй за y часов. За один час первый оператор выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а второй $\frac{1}{y}$. Составим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{3}{x} + \frac{12}{y} = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{3}{y} = \frac{1}{8}; \end{cases} \quad y = 24, x = 12.$ Ответ: первый оператор за 12 ч, второй оператор за 24 ч.												
На изготовление 231 детали ученик тратит на 11 часов больше, чем мастер на изготовление 462 таких же деталей. Известно, что ученик за час делает на 4 детали меньше, чем мастер. Сколько деталей в час делает ученик?	Предположим, что ученик делает x деталей в час, $x > 0$. Тогда мастер делает $x + 4$ детали в час. Составим таблицу по данным задачи: <table><tr><th></th><th>Производительность (дет/ч)</th><th>Время (ч)</th><th>Объём работ (дет)</th></tr><tr><td>Ученик</td><td>x</td><td>$\frac{231}{x}$</td><td>231</td></tr><tr><td>Мастер</td><td>$x + 4$</td><td>$\frac{462}{x + 4}$</td><td>462</td></tr></table> Так как ученик потратил на работу на 11 часов больше, можно составить уравнение: $\frac{231}{x} - \frac{462}{x + 4} = 11.$ Решим уравнение: $\frac{21}{x} - \frac{42}{x + 4} = 1 \Leftrightarrow \frac{21x + 84 - 42x}{x(x + 4)} = 1 \Leftrightarrow x > 0$		Производительность (дет/ч)	Время (ч)	Объём работ (дет)	Ученик	x	$\frac{231}{x}$	231	Мастер	$x + 4$	$\frac{462}{x + 4}$	462
	Производительность (дет/ч)	Время (ч)	Объём работ (дет)										
Ученик	x	$\frac{231}{x}$	231										
Мастер	$x + 4$	$\frac{462}{x + 4}$	462										

	$\Leftrightarrow_{x>0} 84 - 21x - x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 25x - 84 = 0$ Корни полученного квадратного уравнения: -28 и 3. Отбрасывая отрицательный корень, находим, что ученик делает в час 3 детали. Ответ: 3												
Чтобы накачать в бак 117 л воды, требуется на 5 минут больше времени, чем на то, чтобы выкачать из него 96 л воды. За одну минуту можно выкачать на 3 л воды больше, чем накачать. Сколько литров воды накачивается в бак за минуту?	Пусть за минуту в бак накачивается x литров воды, $x > 0$. Тогда за минуту выкачивается $x + 3$ л воды. Составим таблицу по данным задачи: <table><tr><th></th><th>Производительность (л/мин)</th><th>Время (мин)</th><th>Объём работ (л)</th></tr><tr><td>Накачивается</td><td>x</td><td>$\frac{117}{x}$</td><td>117</td></tr><tr><td>Выкачивается</td><td>$x + 3$</td><td>$\frac{96}{x + 3}$</td><td>96</td></tr></table> Так как на накачивание было затрачено на 5 мин. больше времени, составим уравнение: $\frac{117}{x} - \frac{96}{x + 3} = 5,$ откуда: $\begin{cases} 21x + 351 = 5x(x + 3), \\ x(x + 3) \neq 0 \end{cases}$ Получаем квадратное уравнение: $5x^2 - 6x - 351 = 0,$ имеющее корни: $x = 9$ и $x = -7,8$. Отбрасывая отрицательный корень, находим, что за минуту в бак накачивается 9 л воды. Ответ: 9.		Производительность (л/мин)	Время (мин)	Объём работ (л)	Накачивается	x	$\frac{117}{x}$	117	Выкачивается	$x + 3$	$\frac{96}{x + 3}$	96
	Производительность (л/мин)	Время (мин)	Объём работ (л)										
Накачивается	x	$\frac{117}{x}$	117										
Выкачивается	$x + 3$	$\frac{96}{x + 3}$	96										
Дима и Саша выполняют одинаковый тест. Дима отвечает за час на 12 вопросов теста, а Саша — на 22 . Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Дима закончил свой тест позже Саши на 75 минут. Сколько вопросов содержит тест?	Пусть x — количество вопросов теста. Тогда получаем: $\frac{x}{12} - \frac{x}{22} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5x}{132} = \frac{5}{4},$ откуда находим $x = 33$. Ответ: 33												
Две трубы наполняют бассейн за 8 часов 45 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 21 час. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?	По условию первая труба за одну минуту наполняет $\frac{1}{1260}$ часть бассейна, а две трубы вместе за одну минуту наполняют $\frac{1}{525}$ часть бассейна. Таким образом, одна вторая труба за минуту наполняет $\frac{1}{525} - \frac{1}{1260} = \frac{1260 - 525}{1260 \cdot 525} = \frac{1}{900}$ часть бассейна, то есть она наполнит весь бассейн за 15 часов.												

	Ответ: 15.
Три бригады вместе изготовили 114 карданных валов. Известно, что вторая бригада изготовила карданных валов в 3 раза больше, чем первая, и на 16 карданных валов меньше, чем третья. На сколько карданных валов больше изготовила третья бригада, чем первая?	Пусть первая бригада изготовила x карданных валов. Тогда вторая бригада изготовила $3x$ карданных валов, а третья $3x + 16$ карданных валов. Из уравнения $7x + 16 = 114$ находим, что первая бригада изготовила 14 карданных валов, а третья 58 карданных валов. Таким образом, третья бригада изготовила на 44 карданных вала больше, чем первая.

3. Задачи на проценты, сплавы и смеси

На пост главы администрации города претендовало три кандидата: Журавлёв, Зайцев, Иванов. Во время выборов за Иванова было отдано в 2 раза больше голосов, чем за Журавлёва, а за Зайцева — в 3 раза больше, чем за Журавлёва и Иванова вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя?	Заметим, что победителем на выборах окажется Зайцев. Пусть количество голосов, отданных за Зайцева равно x . Тогда за Журавлёва и Иванова вместе отдали $\frac{x}{3}$. Процент голосов, отданных за Зайцева $x : \left(x + \frac{x}{3}\right) \cdot 100 = 75\%$.
При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?	Пусть первый раствор взят в количестве x грамм, тогда он содержит $0,2x$ грамм чистой кислоты, а второй раствор взят в количестве y грамм, тогда он содержит $0,5y$ грамм чистой кислоты. При смешивании двух этих растворов получится раствор массой $x + y$ грамм, по условию задачи, он содержит $0,3(x + y)$ чистой кислоты. Следовательно, можно составить уравнение: $0,2x + 0,5y = 0,3(x + y).$ Выразим x через y : $x = 2y$. Следовательно, отношение, в котором были взяты растворы: $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$. Ответ: $\frac{2}{1}$.
Смешали некоторое количество 21-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 95-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?	Пусть взяли x г 21-процентного раствора, тогда взяли и x г 95-процентного раствора. Концентрация раствора — масса вещества, разделённая на массу всего раствора. В первом растворе содержится $0,21x$ г, а во втором — $0,95x$ г. Концентрация получившегося раствора равна $\frac{0,21x + 0,95x}{x + x} = 0,58$, или 58%. Ответ: 58.
Свежие фрукты содержат 86 % воды, а	Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 14%, а высушенных — 77%. Значит, для приготовления 72 кг высушенных фруктов

высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных фруктов?	$\frac{77}{14} \cdot 72 = 396$ требуется 396 кг свежих. Ответ: 396 кг.
Имеются два сосуда, содержащие 12 кг и 8 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 65% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?	Пусть концентрация первого раствора - x, концентрация второго раствора - y. Составим систему уравнений согласно условию задачи: $\begin{cases} 12x + 8y = (12 + 8) \cdot 0,65 \\ x + y = 2 \cdot 0,6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 8 \cdot (1,2 - x) = 13 \\ y = 1,2 - x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,85 \\ y = 0,35. \end{cases}$ Таким образом, во втором растворе содержится $8 \cdot 0,35 = 2,8$ килограмма кислоты Ответ: 2,8