

Материалы для отработки темы «Уравнения»

1. Решение задач с помощью квадратных уравнений

Периметр прямоугольника равен 46 см, а его диагональ – 17 см (Рис. 1). Найти стороны прямоугольника.	Пусть x см – одна сторона прямоугольника. Тогда другая – $(23 - x)$ см, так как удвоенная сумма сторон (периметр) равна 46 см. Теперь воспользуемся теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника, который образован смежными сторонами прямоугольника и его диагональю, и составим уравнение. $x^2 + (23 - x)^2 = 17^2$ $2x^2 - 46x + 529 = 289$ $2x^2 - 46x + 240 = 0 \quad :2$ $x^2 - 23x + 120 = 0$ По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 23 \\ x_1 x_2 = 120 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 8 \end{cases}$ Это и есть длины сторон. Логично, что получилось два ответа: за x ведь можно было взять как меньшую сторону, так и большую. Ответ: 15 см и 8 см.
Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 5 больше другого, равно 104. Найти эти числа.	Пусть меньшее из данных чисел равно x, тогда большее число равно $x + 5$. По условию произведение этих чисел равно 104, Поэтому получаем уравнение: $x(x + 5) = 104$ или $x^2 + 5x - 104 = 0$. Решим это квадратное уравнение. Найдем его дискриминант $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-104) = 441 = 21^2$ корни $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 21}{2}$, т.е. $x_1 = \frac{-5+21}{2} = 8$ и $x_2 = \frac{-5-21}{2} = -13$. Второй корень по смыслу задачи не подходит, т. к. даны натуральные числа. Итак, меньшее число равно 8,

	тогда большее число равно $8 + 5 = 13$. Ответ: 8 и 13.
В прямоугольном треугольнике один катет больше другого на 7 см, а гипотенуза больше меньшего катета на 8 см. Найти стороны треугольника.	Пусть длина меньшего катета составляет x см, тогда длина большего катета равна $x + 7$ см, длина гипотенузы равна $x + 8$ см. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Получаем уравнение: $(x + 8)^2 = x^2 + (x + 7)^2$ или $x^2 + 16x + 64 = x^2 + x^2 + 14x + 49$, или $0 = x^2 - 2x - 15$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 5$ и $x_2 = -3$. По смыслу задачи значение x должно быть положительным числом. Поэтому подходит только первый корень $x = 5$. Тогда длина второго катета равна $5 + 7 = 12$ см, длина гипотенузы $5 + 8 = 13$ см. Ответ: 5 см, 12 см, 13 см.

2. Задача на движение

Катер прошел 5 км по течению реки и 8 км по озеру, затратив на весь путь 1 час. Скорость течения равна 3 км/ч. Найти скорость катера по течению.	пусть x км /ч – скорость катера по течению. Тогда скорость катера по озеру меньше ровно на скорость течения – ведь в озере течения нет. Значит, по озеру катер двигался со скоростью $(x - 3)$ км/ч. При этом мы также знаем пути, которые катер прошёл по реке и по озеру. Вспомним уравнение движения: $s = vt$. Найдем время $t = \frac{s}{v}$: по озеру $\frac{8}{x-3}$, а по реке – $\frac{5}{x}$. Чтобы было удобнее, запишем все данные в следующую таблицу. <table><tr><td></td><td>s</td><td>v</td><td>t</td></tr><tr><td>По течению</td><td>5</td><td>x</td><td>$\frac{5}{x}$</td></tr><tr><td>По озеру</td><td>8</td><td>$x - 3$</td><td>$\frac{8}{x - 3}$</td></tr></table> Теперь вспомним, что в общей сложности катер плыл 1 час, получаем уравнение: $\frac{8}{x - 3} + \frac{5}{x} = 1 \quad x(x - 3)$ $8x + 5x - 15 = x^2 - 3x$ $x^2 - 16x + 15 = 0$		s	v	t	По течению	5	x	$\frac{5}{x}$	По озеру	8	$x - 3$	$\frac{8}{x - 3}$
	s	v	t										
По течению	5	x	$\frac{5}{x}$										
По озеру	8	$x - 3$	$\frac{8}{x - 3}$										

	По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 16 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ 1 – не подходит, так как скорость катера по течению не может быть меньше скорости течения. Значит, ответ: 15 км/ч
Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 60 км, выехал автобус, а через 20 мин вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автобус пришел в пункт В на 10 мин позже легкового автомобиля. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.	х - скорость автобуса, он был в пути на 20+10=30 мин=0,5 часа больше автомобиля 1,5 х - скорость автомобиля Составим уравнение: 60/х - 60/1,5 х = 0,5 60/х - 40/х = 0,5 20=0,5 х х=40 (км/ч) - скорость автобуса
Велосипедист и мотоциклист проехали 60 км, причем мотоциклист был в пути на 3 ч меньше. Вычислите скорость велосипедиста и мотоциклиста, если скорость велосипедиста была на 18 км/ч меньше скорости мотоциклиста.	Пусть скорость велосипедиста = х То скорость мотоциклиста будет = х+18 Время велосипедиста 5 часов, мотоциклиста 2 часа, раз они проехали одинаковое количество, значит, (по формуле время умножить на скорость равно расстояние), 5х=2(х+18) 5х=2х+36 3х=36 х=12
Моторная лодка прошла 28 км по течению реки и 25 км против течения, затратив на весь путь столько же времени, сколько ей потребовалось на прохождение 54 км по озеру. Найдите скорость моторной лодки по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч.	пусть собственная скорость лодки х км/ч, тогда х+2 км/ч - скорость лодки по течению х-2 км/ч - скорость лодки против течения Следовательно можем записать уравнение 28/(х+2)+25/(х-2)=54/х 28х(х-2)+25х(х+2)=54(х-2)(х+2) 28х²-56х+25х²+50х=54х²-216 х²+6х-216=0 D=6²+4*1*216=30² х=(-6-30)/2=-18 <0, следовательно не удовл. х=(-6+30)/2=12 (км/ч)-собственная скорость лодки Ответ: 12 км/ч
Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 20 км, выехал мотоциклист, а через 6 мин вслед за ним выехал автобус, скорость которого на 10 км/ч больше скорости мотоциклиста. Автобус прибыл в пункт В на 4 мин раньше мотоциклиста. Найдите скорости автобуса и мотоциклиста.	Пусть х км/ч скорость мотоциклиста Тогда х+10 км/ч скорость автобуса 20/х ч время движения от А до В мотоциклиста 20 / (х+10) ч время движения от А до В автобуса Мотоциклист выехал на 6 мин раньше и прибыл на 4 мин позже автобуса, то есть он был в пути на 6+4 = 10 мин = 1/6 часа дольше автобуса, поэтому 20/х - 20 / (х+10) = 1/6 120 х + 1200 - 120 х = х² + 10 х х² + 10 х - 1200 = 0 х1 = 30 и х2 = - 40 (посторонний корень) Ответ 30 км/ч - скорость мотоциклиста 30+10 =

	40 км/ч - скорость автобуса
Лодочник проплыл 3 км по течению реки и 2 км против течения за тоже время, за, которое мог бы проплыть плот 3 км по течению. Собственная скорость лодки 2 км/ч. Найдите скорость течения реки.	Возьмем скорость течения реки x км/ч, а скорость лодки по течению $(6 + x)$ км/ч, против течения - $(6 - x)$ км/ч. Составим уравнение через формулу времени $t = S / V$. Так как у плота нет собственной скорости, то его скорость равна скорости течения реки. $3 / (6 + x) + 3 / (6 - x) = 4 / x,$ $3x(6 - x) + 3x(6 + x) = 4(6 - x)(6 + x),$ $36x = 144 - 4x^2,$ $4x^2 + 36x - 144 = 0,$ $x^2 + 9x - 36 = 0,$ $D = 81 + 144 = 225 = 15^2$ $X = (-9 + 15) / 2 = 3 \text{ км/ч} - \text{ скорость течения реки.}$ Второй корень не подходит, так как скорость не может быть отрицательным числом. Ответ: 3 км/ч скорость течения реки.

3. Задача на работу

Бассейн наполняется двумя трубами за 10 часов. За сколько часов наполнит бассейн первая труба, если она это делает на 15 ч быстрее, чем вторая?	Для начала вспомним формулу для вычисления объема проделанной работы: $A = vt$. Обратите внимание на то, что здесь есть полное соответствие задачам на движение: путь – объем работы, скорость – производительность, время – время. Эту задачу можно решить ровно по тому же алгоритму, что и предыдущую. Сначала перепишем условие на математическом языке. Работа по наполнению бассейна объемом A выполнена двумя трубами одновременно с общей скоростью $v_1 + v_2$ за время $t = 10$ ч. Первая труба наполняет бассейн (объем работы A) со скоростью v_1 за время t_1. Вторая труба наполняет бассейн (объем работы A) со скоростью v_2 за время t_2.
---	---

	Разница между временем t_2 и временем t_1 равна 15 ($t_2 > t_1$ на 15 ч) Обратите внимание на то, что в подобных задачах на совместную работу производительности складывать можно, а времена – нет. $\begin{cases} A = 10(v_1 + v_2) \\ A = v_1 t_1 \\ A = v_2 t_2 \\ t_2 - t_1 = 15 \end{cases}$ Второй шаг – составляем систему: Так как трубы заполняют один и тот же бассейн, то есть выполняют одинаковую работу, то можно принять работу за 1. Обратите внимание, речь не идет об 1 литре или кубометре, 1 в данном случае – это 1 бассейн. Так что и производительность в этом случае будет измеряться не в литрах в час, а в бассейнах в час, то есть какую часть бассейна заполнит труба за час. $\begin{cases} \frac{1}{10} = \frac{v_1 + v_2}{A} \\ \frac{1}{t_1} = \frac{v_1}{A} \\ \frac{1}{t_2} = \frac{v_2}{A} \\ t_2 = 15 + t_1 \end{cases}$ Третий шаг – решаем систему: $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1 + 15} = \frac{1}{10} \quad 10t_1(t_1 + 15)$ $10t_1 + 150 + 10t_1 = t_1^2 + 15t_1$ $t_1^2 - 5t_1 - 150 = 0$ По теореме Виета: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 t_2 = -150 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 15 \\ t_2 = -10 \end{cases}$ И теперь анализ: время не может быть отрицательным, так что ответ – 15 часов. Ответ: 15 ч.
Завод по плану должен был изготовить 180 станков к определенному сроку. Перевыполняя дневную норму на 2 станка, завод выполнил задание на 1 день	X - кол-во произведенных станков в день y - кол-во дней $180/Y = x$ $180 = (x+2) * (y-1)$ $180 = (180/y) * (y-1)$

раньше срока. За сколько дней завод выполнил план?	раскрываем скобки и приводим подобные и в итоге $-180 + 2y^2 - 2y = 0$ Решаем по дискриминанту и в итоге $y = 10$ т. к. выполнили план на 1 день раньше, то $y - 1 =$ (наш ответ) $10 - 1 = 9$ ответ
--	---

4. Задачи на проценты, сплавы и смеси

На пост главы администрации города претендовало три кандидата: Журавлёв, Зайцев, Иванов. Во время выборов за Иванова было отдано в 2 раза больше голосов, чем за Журавлёва, а за Зайцева — в 3 раза больше, чем за Журавлёва и Иванова вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя?	Заметим, что победителем на выборах окажется Зайцев. Пусть количество голосов, отданных за Зайцева равно x. Тогда за Журавлёва и Иванова вместе отдали $\frac{x}{3}$. Процент голосов, отданных за Зайцева $x : \left(x + \frac{x}{3} \right) \cdot 100 = 75\%.$
При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?	Пусть первый раствор взят в количестве x грамм, тогда он содержит $0,2x$ грамм чистой кислоты, а второй раствор взят в количестве y грамм, тогда он содержит $0,5y$ грамм чистой кислоты. При смешивании двух этих растворов получится раствор массой $x + y$ грамм, по условию задачи, он содержит $0,3(x + y)$ чистой кислоты. Следовательно, можно составить уравнение: $0,2x + 0,5y = 0,3(x + y).$ Выразим x через y: $x = 2y$. Следовательно, отношение, $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}.$ в котором были взяты растворы: Ответ: $\frac{2}{1}$.
Смешали некоторое количество 21-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 95-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?	Пусть взяли x г 21-процентного раствора, тогда взяли и x г 95-процентного раствора. Концентрация раствора — масса вещества, разделённая на массу всего раствора. В первом растворе содержится $0,21x$ г, а во втором — $0,95x$ г. Концентрация получившегося раствора $\frac{0,21x + 0,95x}{x + x} = 0,58,$ равна или 58%. Ответ: 58.
Свежие фрукты содержат 86 % воды, а высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных фруктов?	Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 14%, а высушенных — 77%. Значит, для приготовления 72 кг высушенных фруктов требуется $\frac{72}{0,77} \cdot 0,14 = 396$ кг свежих. Ответ: 396 кг.