МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ НА ОГЭ

учитель будущего

Мелентьева
Наталья Михайловна

Рассматриваемые вопросы.

1. Рациональное уравнение: определение и примеры
2. Метод разложения на множители
3. Метод введения новой переменной при решении биквадратных уравнений.
4. Дробно-рациональные уравнения.
5. Рациональные уравнения с модулем.
6. Типичные ошибки на ОГЭ.

1. Рациональное уравнение: определение и примеры

Определение 1:
Рациональное уравнение – это такое уравнение, в обеих частях которого содержатся рациональные выражения.

Определение 2:
Рациональное уравнение – это такое уравнение, запись левой части которого содержит рациональное выражение, а правая – нуль.

Рациональные уравнения делятся на две большие группы: целые и дробные.

Определение 3:

Рациональное уравнение будет являться целым в том случае, если в записи левой и правой его частей содержатся целые рациональные выражения.

Определение 4:

Рациональное уравнение будет являться дробным в том случае, если одна или обе его части содержат дробь.

2. Метод разложения на множители

Метод разложения на множители применяется для решения уравнений, в левой части которых находится произведение конечного числа выражений, а в правой – нуль, то есть, для решения уравнений $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$, где $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ – некоторые выражения.

Метод разложения на множители состоит в переходе от решения уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ к *решению совокупности уравнений* $f_1(x)=0, f_2(x)=0, \ldots, f_n(x)=0$ на области допустимых значений переменной x для исходного уравнения. Согласно методу разложения на множители от решения уравнения

$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)=0$ следует перейти к решению совокупности трех уравнений $x=0, x+1=0, x+2=0$ на ОДЗ для исходного уравнения, которая в данном примере, очевидно, есть множество всех действительных чисел R.

учитель будущего

Пример (Задание 20 ОГЭ)

Решите уравнение: $x^3 = x^2 - 7x + 7$

Решение. Перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители с помощью группировки:

$x^3 - x^2 + 7x - 7=0$

$x^2(x-1) + 7(x-1)=0$

$(x^2+7)(x-1)=0$

$x^2 + 7 = 0$ или $x - 1=0$

Корней нет $\qquad$ $x = 1$

Ответ: 1

Пример (Задание 20 ОГЭ)

Решите уравнение: $(x-3)(x-4)(x-5)=(x-2)(x-4)(x-5)$

Решение: перенесем в одну сторону и вынесем за скобку $(x-4)(x-5)$

Получаем:

$(x-4)(x-5)(x-3-(x-2))=0$

$(x-4)(x-5)(x-3-x+2)=0$

$(x-4)(x-5)(-1)=0$

$X-4=0$ или $x-5=0$

$X=4$ $\qquad$ $x=5$

Ответ :4;5

3. Метод введения новой переменной (биквадратные уравнения)

Определение 5

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$ **называют биквадратным уравнением** («би» — два, т. е. как бы «дважды квадратное» уравнение).

Пример (Задание 20 ОГЭ)

Решите уравнение: $x^4+x^2-20=0$

Решение. *Введём новую переменную. Пусть* t=$x^2, t \geq 0$

Получаем уравнение $t^2+t-20=0$

Находим корни данного уравнения:

$t_1=4$ $t_2=$-5 <0- посторонний корень

Обратная замена:

x^2=4

X=∓ 2

Ответ: X= ∓ 2

4. Дробно-рациональные уравнения

Определение 6

Дробно-рациональные уравнения – уравнения, которые можно свести к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ где P(x) и Q(x) - выражения с иксом (или другой переменной).

Этапы решения дробно- рационального уравнения.

- Определить ОДЗ
- Найти наименьший общий знаменатель всех дробей.
- Умножить уравнение на этот знаменатель и решить полученное целое уравнение.
- Включить в ответ только те корни, которые входят в ОДЗ.

Пример 1:

Решим уравнение: $\frac{x}{x-2}$ - $\frac{7}{x+2}$= $\frac{8}{x^2-4}$

ОДЗ: x$\neq$ $2, x \neq -2$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $x^2 - 4$

$\frac{x(x^2-4)}{x-2}$ - $\frac{7(x^2-4)}{x+2}$= $\frac{8(x^2-4)}{x^2-4}$, решим получившееся уравнение

X(x+2) - 7(x-2) = 8

$x^2 + 2x - 7x + 14 = 8$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

x_1 =2- не удовлетворяет ОДЗ

$x_2 = 3$

Ответ: 3

Пример 2:
Решим уравнение:

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$$

1. ОДЗ: $x \neq -1, x \neq -2, x \neq 1, x \neq -4$
2. Решение: раскроем скобки в знаменателях

$$\frac{6}{x^2+3x+2}+\frac{8}{x^2+3x-4}=1$$

Полагая, что $x^2 + 3x + 2 = t$ приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{t}+\dfrac{8}{t-6}=1, \\ x^2+3x+2=t. \end{cases}$$

Решив первое уравнение системы, получаем корни $t_1 = 2, t_2 = 18$. Далее, выполнив обратную замену, из второго уравнения системы получаем корни исходного уравнения: .

$$x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_{3,4} = 0,5\left(-3 \pm \sqrt{73}\right)$$

5. Рациональные уравнения с модулем

Определение 7

Модулем или абсолютной величиной действительного числа x называется неотрицательное число |x|, равное числу x, если x ≥ 0, и числу (−x), если x < 0.

Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Определение 8

Уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, называется **уравнением с модулем.**

<u>Метод интервалов (универсальный)</u>

Существует несколько способов решения уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля. Один из них — это, так называемый, метод интервалов.

<u>Он состоит в следующем:</u>

1) найти критические точки, т.е. значения неизвестной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;
2) разбить область допустимых значений уравнения на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;
3) на каждом из этих промежутков уравнение записать без знака модуля, а затем решить его. Объединение решений, найденных на всех промежутках, и составляет все решения исходного уравнения.

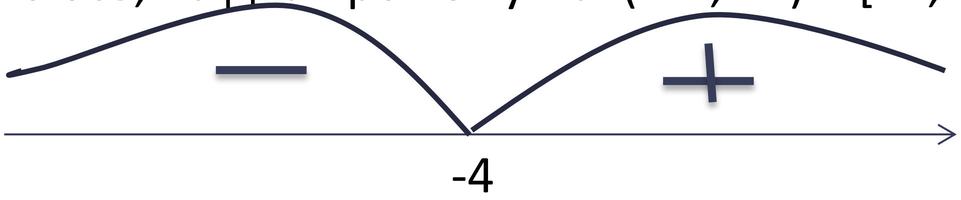
Пример 1

Решите уравнение: $|x + 4| = 2x - 10$

Решение.

1)Решим уравнение $x + 4 = 0$ и найдем критическую точку $x = -4$.

2) Разобьем область допустимых значений данного уравнения, т.е. всю числовую ось, на два промежутка: $(-\infty, -4)$ и $[-4, +\infty)$.



3) При $x < -4$ выражение под знаком модуля отрицательно и, следовательно, $|x+4| = -(x+4)$. Поэтому на промежутке $(-\infty, -4)$ исходное уравнение можно заменить равносильным $-(x + 4) = 2x - 10$.

учитель будущего

Решение этого уравнения $x = 2$, однако оно не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому исходное уравнение на данном промежутке решений не имеет.

4) При $x \ge -4$ выражение под знаком модуля неотрицательно и, следовательно, $|x + 4| = x + 4$.
Поэтому на промежутке $[-4, +\infty)$ исходное уравнение можно записать
$x + 4 = 2x - 10$.
$x = 14$, корень принадлежит рассматриваемому промежутку и, следовательно, является решением исходного уравнения.
Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение
$x = 14$
Ответ: 14.

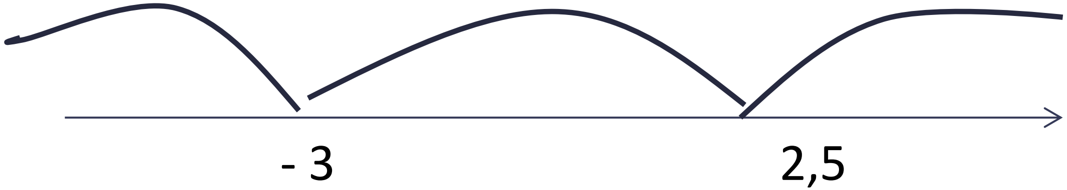
Пример 2

Решите уравнение: $|5-2x| + |x + 3| = 2 - 3x$

Решение.

1. Решим уравнения $5 - 2x = 0$ и $x + 3 = 0$ и найдем критические точки $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = -3$.

2. Разобьем область допустимых значений данного уравнения на три промежутка: $(-\infty, -3)$, $[-3, 2{,}5)$ и $[2{,}5, +\infty)$.



3. При $x < -3$ выражение $5 - 2x > 0$ и, следовательно, $|5 - 2x| = 5 - 2x$,
 а выражение $x + 3 < 0$, поэтому $|x + 3| = -(x + 3)$.

Т.о., на промежутке $(-\infty, -3)$ исходное уравнение можно записать
$5 - 2x - (x + 3) = 2 - 3x$. Решение данного уравнения — все значения неизвестной x, принадлежащие промежутку $(-\infty, -3)$.

При $-3 \leq x < 2{,}5$ выражение $5 - 2x > 0$, а выражение $x + 3 \geq 0$,
т.е. $|5-2x| = 5-2x$ и $|x+3| = x+3$. Поэтому на промежутке $[-3;2{,}5)$ исходное уравнение принимает вид $5-2x+x+3 = 2-3x$.
Решение этого уравнения $x = -3$, оно принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому является решением исходного уравнения.
При $x \geq 2{,}5$ выражение $5-2x \leq 0$, а выражение $x + 3 > 0$,
т.е. $|5-2x| = -(5-2x)$, а $|x+3| = x+3$.
На промежутке $[5\ 2, +\infty)$ исходное уравнение можно записать
$-(5 - 2x) + x + 3 = 2 - 3x$.
Решение этого уравнения $x = \frac{2}{3}$ не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому оно не будет решением исходного уравнения .
Таким образом, решением исходного уравнения является промежуток $(-\infty, -3]$.

Ответ: $(-\infty, -3]$.

Метод замены неизвестного

Иногда уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком модуля, можно решить довольно просто, используя метод замены неизвестного.

Продемонстрируем данный метод на конкретном примере.

$x^2 - 5|x| + 6 = 0$

Решение. Пусть $y = |x|$.

По свойству модуля $|x|^2 = x^2$.

Тогда $y^2 - 5y + 6 = 0$.

Его корни: $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

$\Rightarrow$ исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$|x| = 2$ и $|x| = 3$, решениями которых являются числа $x = \pm 2$, $x = \pm 3$.

Ответ: ± 2, ± 3.

Другие способы решения:

Также уравнение с модулем можно решить следующими способами:

- ✓ Метод замены уравнения совокупностью систем
- ✓ Графический метод

учитель будущего

2. Типичные ошибки на ОГЭ

учитель будущего

Решите уравнение $x^3+5x^2-x-5=0$.

Решение.

Последовательно получаем:

ПОТЕРЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО КОРНЯ ПРИ РЕШЕНИИ НЕПОЛНОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$$x^3+5x^2-x-5=0 \Leftrightarrow x^2(x+5)-(x+5)=0 \Leftrightarrow (x+5)\underline{(x^2-1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-1)(x+1)=0 \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $-5; -1; 1$.

Пример (Задание 20 ОГЭ)

Решите уравнение: $(x-3)(x-4)(x-5)=(x-2)(x-4)(x-5)$

Решение: перенесем в одну сторону и вынесем за скобку $(x-4)(x-5)$

Получаем:

$(x-4)(x-5)(x-3-(x-2))=0$

$(x-4)(x-5)(x-3-x+2)=0$

$(x-4)(x-5)(-1)=0$

$X-4=0$ или $x-5=0$

$X=4$ $\quad$ $x=5$

Ответ :4;5

СОКРАЩЕНИЕ ОДИНАКОВЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ, ЧТО ПРИВОДИТ К ПОТЕРЕ КОРНЕЙ

Пример (Задание 20 ОГЭ)

Решите уравнение: $x^4 + x^2 - 20=0$

Решение. *Введём новую переменную. Пусть* $t=x^2, t \geq 0$

Получаем уравнение $t^2 + t - 20=0$

Находим корни данного уравнения:

$t_1 = 4$ t_2 =-5 <0- посторонний корень

Обратная замена:

$x^2=4$

$X=\mp 2$

Ответ: $X= \mp 2$

1) ЗАБЫВАЮТ ДЕЛАТЬ ОБРАТНУЮ ЗАМЕНУ
2)ПОТЕРЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО КОРНЯ

учитель будущего

Решим уравнение: $\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

ОДЗ: $x \neq 2, x \neq -2$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $x^2 - 4$

$\frac{x(x^2-4)}{x-2} - \frac{7(x^2-4)}{x+2} = \frac{8(x^2-4)}{x^2-4}$, решим получившееся уравнение

$X(x+2) - 7(x-2) = 8$

$x^2 + 2x - 7x + 14 = 8$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2$- не удовлетворяет ОДЗ

$x_2 = 3$

Ответ: 3

1) НЕВЕРНОЕ РАСКРЫТИЕ СКОБОК
2)ОТСУТСТВИЕ ОДЗ
3) НЕ ВЫПОЛНЕН ОТБОР КОРНЕЙ

Решите уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8.$

1СОКРАЩЕНИЕ РАВНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ
2)ОТСУТСТВИЕ ОДЗ И ОТБОР КОРНЕЙ

Решение.

Последовательно получаем:

$$x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: -2.

Решите уравнение $\frac{4}{x-9}+\frac{9}{x-4}=2.$

ПРИВЕДЕНИЕ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ ТОЛЬКО ЛЕВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{4}{x-9}+\frac{9}{x-4}=2 \Leftrightarrow \frac{4(x-4)+9(x-9)}{(x-9)(x-4)}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 9, \\ 13x-97=2(x^2-13x+36) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 9, \\ 2x^2-39x+169=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 9, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{39-13}{4}, \\ x=\frac{39+13}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6,5, \\ x=13. \end{array}\right.$$

Ответ: 6,5; 13.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!

учитель будущего