



Типичные ошибки учащихся
на ЕГЭ в № 13.

Методика обучения решению
тригонометрических
уравнений (10-11 классы).

Овсянкина Оксана

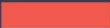
Алексеевна

Учитель математики

МБОУ СОШ № 28

г. о. Мытищи

учитель будущего



Типичные ошибки учащихся на ЕГЭ в № 13. Методика обучения решению тригонометрических уравнений (10-11 классы).

Задание № 13 на профильном ЕГЭ «Решить уравнение и указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку» занимает одну из важнейших позиций в структуре КИМ. К их выполнению приступает до 60% участников ЕГЭ, а положительные баллы получает от 25 до 30% всех участников. Успешность выполнения заданий этого типа является характеристическим свойством, различающим базовый и профильный уровни подготовки учащихся. В задании с развернутым ответом проверяется умение решать тригонометрические уравнения, уравнения смешанного типа и отбирать корни, принадлежащие данному отрезку.

Рассмотрим методы решения уравнений.

Переход к уравнению -следствию.

Переход к уравнению-следствию, как правило, связан с расширением ОДЗ, которое обычно происходит после какого-либо алгебраического преобразования: возведения в четную степень, освобождения от знаменателя, логарифма или модуля. Вместо непосредственной подстановки найденных корней в исходное уравнение можно подставить корни лишь в неравенства, невыполнение которых и приводит к появлению посторонних корней.



Пример 1: (задание 13) Решите уравнение

$$8\sin^2 x - 14\sin x + 5 = 0$$

$$(4\sin x - 5)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{5}{4} \quad \begin{array}{l} \text{- нет решений} \\ \text{или} \end{array}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{- не входит в ОДЗ (проверка)}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

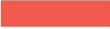
$$\frac{8\sin^2 x - 14\sin x + 5}{\sqrt{-6\cos x}} = 0$$

$$\text{ОДЗ: } \cos x < 0$$



Метод введения новой переменной.

При решении тригонометрических уравнений часто используют Метод введения новой переменной. Основной идеей метода является замена повторяющегося алгебраического выражения в данном уравнении некоторой буквой, играющей роль новой переменной. Решив после такой замены уравнение относительно новой переменной, нужно сделать обратную замену, вернувшись к данной переменной, и решить полученные уравнения уже относительно данной переменной.



а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение.

а) Пусть $t = \log_4(4\sin x)$, тогда исходное уравнение запишется в виде $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$.

При $t = 2$ получим: $\log_4(4\sin x) = 2$, значит, $\sin x = 4$, что невозможно.

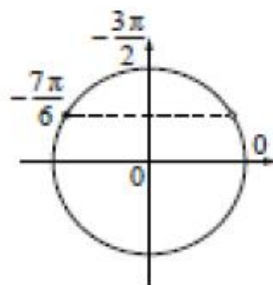
При $t = \frac{1}{2}$ получим: $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$, значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{6}$.



13

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Основными ошибками при выполнении первого пункта данного задания оказались ошибки:

- 1) в применении формул приведения (не учитывается знак тригонометрической функции в четверти), деление обеих частей уравнения на $\cos x$ или на $\sin x$, что приводит к потере корня.
- 2) ошибки в формулах дискриминанта и корней квадратного уравнения,
- 3) некорректные записи при вычислении дискриминанта и корней (например, ставится знак равенства между очевидно неравными выражениями),
- 4) в преобразованиях выражений, содержащих квадратные корни, степени,
- 5) незнание формул решения простейшего тригонометрического уравнения.

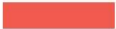
При выполнении второго пункта уравнения участники экзамена часто демонстрировали

- б) небрежность при отборе корней с помощью тригонометрической окружности,
- 7) или неумение отбирать целые значения при решении двойного неравенства с последующим отысканием значений корней уравнения.

Комментарий. Отбор корней может быть обоснован с помощью графика, решения двойных неравенств, единичной окружности и т.п.

Следует обратить особое внимание на то, что любые ошибки, допущенные в тригонометрических формулах, в нахождении значений тригонометрических функций не относятся к вычислительным.

Вычислительная ошибка – ошибка, допущенная при выполнении арифметических действий: сложение, вычитание, умножение, деление.



1) Комментарий.

Уравнение смешанного типа. Решается с помощью введения новой переменной. Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

учитель будущего

N13

$$9 \cdot 81^{\cos x} - 2 \cdot 9 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

$$a) 9t^2 - 2 \cdot 9t + 3 = 0$$

$$D = 784 - 108 = 676$$

$$t_1 = \frac{2 \cdot 9 + 26}{18} = 3$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot 9 - 26}{18} = \frac{1}{9}$$

$$9^{\cos x} = 3$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi k$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi + 2\pi k < 4\pi$$

$$0,75 \leq k < 1,5$$

$$k = 1$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{3\pi}{3}; x_2 = \frac{11\pi}{3}$$

$$b) +\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k < 4\pi$$

$$+\frac{5}{2} - \frac{1}{3} \leq 2k < 4 - \frac{1}{3}$$

$$+\frac{15-2}{12} \leq k < \frac{12-1}{6}$$

$$+\frac{13}{12} \leq k < \frac{11}{6}$$

$$k = -1, 0, 1. k \in \emptyset$$

$$+\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 4\pi$$

$$+\frac{5}{2} + \frac{1}{3} \leq 2k < 4 + \frac{1}{3}$$

$$+\frac{15+2}{12} \leq k < \frac{12+1}{6}$$

$$+\frac{17}{12} \leq k < \frac{13}{6}$$

$$k = -1, 0, 1, 2. 2$$

2) Комментарий.

Уравнение тригонометрическое с применением формулы приведения. Ошибка в применении формулы приведения (4 четверть, должен стоять «плюс») и «сокращение» уравнения на $\cos x$. При этом допущены две серьезные алгебраические ошибки. Пункт б) не рассматривается.

Оценка эксперта: 0 баллов.

учитель будущего

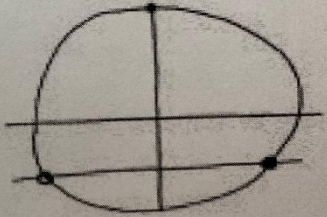
$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) &= -\sin 2x \\ \rightarrow + -\sin 2x &= \cos x \quad ; \sin 2x + \cos x = 0 \\ 2 \sin x \cos x + \cos x &= 0 \quad | : \cos x \Rightarrow 2 \sin x + 1 = 0 \\ \Rightarrow \sin x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

а) $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$

б) $\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 4\pi$

$$\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 4\pi$$
$$\frac{5\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{19\pi}{6} \quad \text{и} \quad 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$$

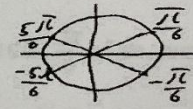
б) $\left[\frac{19\pi}{6} ; \frac{23\pi}{6}\right]$



3) Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пункте а, но применяя формулу приведения автор минус ставит перед x , потом перед синусом. В пункте а) ошибки нет. В п. б выполнено все верно.

Оценка эксперта: 2 балла.

$$\begin{aligned}
 & 4 \sin x + 4 \sin(x + \pi) = \frac{5}{2} \\
 & 4 \sin x + 4 \sin(-x) = \frac{5}{2} ; 4 \sin x + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2} ; 4^{\sin x} = t ; t > 0 \\
 & t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0 \cdot t \\
 & \frac{t^2 + 1 - 2,5t}{t} = 0 ; t(t^2 - 2,5t + 1) = 0 \\
 & t^2 - 2,5t + 1 = 0 \qquad t(t - 2)(t - \frac{1}{2}) = 0 \quad t > 0 \\
 & D = 6,25 - 4 = 2,25 \qquad (t - 2)(t - \frac{1}{2}) = 0 \\
 & t_1 = \frac{2,5 + 1,5}{2} = 2 \qquad t = 2 \quad t = \frac{1}{2} \\
 & t_2 = \frac{2,5 - 1,5}{2} = \frac{1}{2} \\
 & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + \pi n \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{6} \\ \frac{5\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} \\ -\frac{5\pi}{6} \end{matrix}
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 & \text{д) } x = \frac{\pi}{6} + \pi n \quad \left[\frac{5\pi}{2} ; 4\pi \right] \qquad x = \frac{5\pi}{6} + \pi n \\
 & n = 3 \quad x = \frac{19\pi}{6} \qquad n = 2 \quad x = \frac{17\pi}{6} \\
 & \qquad \qquad \qquad n = 3 \quad x = \frac{23\pi}{6} \\
 & \text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6} + \pi n ; \frac{5\pi}{6} + \pi n \quad \text{б) } \frac{19\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6} ; \frac{23\pi}{6}
 \end{aligned}$$

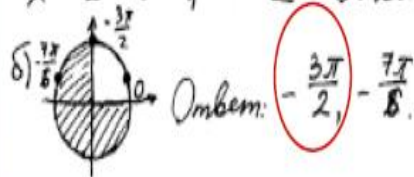
4) Комментарий.

Обоснованно получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки во втором корне квадратного уравнения, но при этом выполнены оба пункта. В пункте б) отборка корней выполнена с помощью окружности.

Оценка эксперта: 1 балл.

$$\log_4(4\sin x) = t_2 = 1; \log_4(4\sin x) = \log_4 4; 4\sin x = 4; \sin x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

$$6) -\frac{7\pi}{6}$$

1 балл

5) Комментарий.

Такое же уравнение как и предыдущее. Ошибка в формулах корней квадратного уравнения. Эта ошибка не вычислительная, поэтому 0 баллов. Пункт б) не рассматривается.

Оценка эксперта: 0 баллов.

13) а) ОДЗ: $4 \sin x > 0$
 $\sin x > 0$

Для точек x решим методом интервалов
 Тогда $\log_4(4 \sin x) = t$; $t \geq 0$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$D = 25 - 16$$

$$D = 9$$

$$t_1 = \frac{5+3}{2} \quad t_1 = 4$$

$$t_2 = \frac{5-3}{2} \quad t_2 = 1$$

Обратная замена

$$\log_4(4 \sin x) = 1 \quad \text{или} \quad \log_4(4 \sin x) = 4$$

$$4 \sin x = 4 \quad 4 \sin x = 256$$

$$\sin x = 1 \quad \sin x = 64$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ Нет решений.

б) Проведем ось OD на единичной окружности



$-\frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{3\pi}{2}$

б) Комментарий.

Пример ошибки, которая не может быть отнесена к вычислительной.

Выполнена не та операция – вместо извлечения корня из числа, это число возведено в квадрат.

Пункт б) не рассматривается.

Оценка эксперта: 0 баллов.

а) $\cos^2 x + 0,5 = \cos^2 x$

$$2\cos^2 x - 1 + 0,5 = \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

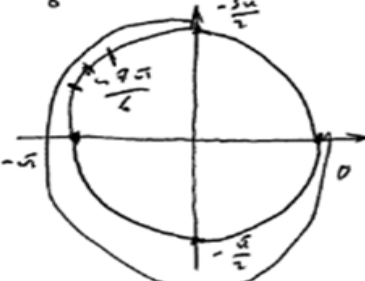
$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{4} \\ \cos x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$x \in \pm \arccos \frac{1}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

7) Комментарий.

Ошибка при возведении в степень в решении логарифмического уравнения. Эта ошибка не вычислительная, поэтому 0 баллов. Пункт б) не рассматривается.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x+13} \quad 2 \log_4^2(4 \sin x) - 5 \log_4(4 \sin x) + 2 = 0 \quad \log_4(4 \sin x) = \frac{0 \pm 3}{2} \\
 & 2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad D = 25 - 16 = 9 \quad \log_4(4 \sin x) = \frac{3}{2} \quad \sin x \neq 0 \quad x \neq \pi n \quad n \in \mathbb{Z} \\
 & \begin{cases} \log_4(4 \sin x) = 2 \\ \log_4(4 \sin x) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 8 = 4 \sin x \\ 2 = 4 \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{2}{1} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{5+3}{4} = 2 \end{cases} \\
 & x = \frac{\sqrt{t}}{6} + 2\pi n; \quad \frac{5\sqrt{t}}{6} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{не подходит т.к. } -1 \leq \sin x \leq 1 \\
 & \left[-\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right]
 \end{aligned}$$


Реш: а) $x = \frac{\sqrt{t}}{6} + 2\pi n; \quad \frac{5\sqrt{t}}{6} + 2\pi n$
 б) $x \in \left[-\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right] \quad n \in \mathbb{Z}$

8) Комментарий.

Дробное тригонометрическое уравнение. Рассмотрены границы синуса и косинуса. Но неверно найдена область допустимых значений переменной и вычислительная ошибка при нахождении второго корня квадратного уравнения. Из-за ошибки в тригонометрии решение пункта б не засчитывается.

Оценка эксперта: 0 баллов.

а) $\frac{4}{1-\cos^2 x} - \frac{5}{\sin x} = 6$ ОДЗ:

$\frac{4}{\sin^2 x} - \frac{5}{\sin x} = 6$ $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}n$ $x \neq \pi n!$

$-15 \sin x \leq 1$
 $-1 \leq \cos x \leq 1$

$4 - 5 \sin x = 6 \sin^2 x$
 $6 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$
 $\sin x = t$
 $6t^2 + 5t - 4 = 0$
 $t_1 = 0,5$
 $t_2 = -\frac{1}{3}$ не сходим ОДЗ

$\sin x = 0,5$
 $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{2}n \\ x_2 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{2}n \end{cases}$

б) $-2\sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{2}n \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $-12 \sqrt{2} \leq \sqrt{2} + 12\sqrt{2}n \leq -3\sqrt{2}$
 $-12 \leq 1 + 12n \leq -3$
 $-13 \leq 12n \leq -4$
 $n = -1$

$-2\sqrt{2} \leq \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{2}n \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $-12 \sqrt{2} \leq 6\sqrt{2} - \sqrt{2} + 12\sqrt{2}n \leq -3\sqrt{2}$
 $-12 \leq 5 + 12n \leq -3$
 $-17 \leq 12n \leq -8$ $n = -1$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6} - 2\sqrt{2}; \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - 2\sqrt{2}$

9) Комментарий.

Тригонометрическое уравнение с применением формулы - сумма углов. Из-за ошибки в тригонометрии в нахождении второго корня уравнения $\sin x = -1/2$, решение пункта б не засчитывается.

Оценка эксперта: 0 баллов.

№13. а) $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3}\cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2\sqrt{3}(1 - \sin^2 x) = \cos x - 2\sqrt{3}$$

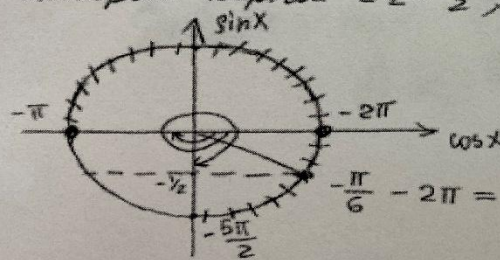
$$\sqrt{3} \sin x - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \sin^2 x = -2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \sin x (1 + 2 \sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$

б) Отберем корни $\in [-\frac{5\pi}{2}, -\pi]$ на числовой окр-ти



$-\pi - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}$

Ответ: а) $\begin{cases} x = \pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$

б) $x \in \{-\frac{13\pi}{6}, -2\pi, -\pi\}$

10) Комментарий.

Уравнение смешанного типа. В п. а) допущена ошибка в корне простейшего тригонометрического уравнения, решение пункта б не засчитывается.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$13. a) 9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

$$9 \cdot (9^x)^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда:

$$9t - 28t + 3 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 784 - 108 = 676$$

$$t_1 = \frac{28-26}{2 \cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}; \quad t_2 = \frac{28+26}{2 \cdot 9} = \frac{54}{18} = 3$$

Вернемся к замене: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi d, d \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или } 9^{\cos x} = 3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x} = 3^1$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$b) \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 4\pi; \quad \frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq \frac{1}{3} + 2n \leq 4, n \in \mathbb{Z} \quad \frac{5}{2} \leq -\frac{1}{3} + 2k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\frac{1}{6} \leq 2n \leq 3\frac{2}{3}, n \in \mathbb{Z} \quad 2\frac{5}{6} \leq 2k \leq 4\frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{6} \leq n \leq 1\frac{5}{6}, n \in \mathbb{Z} \quad 1\frac{5}{12} \leq k \leq 2\frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

n - нет таких

$$k = 2$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi + \pi d \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq 1 + d \leq 4, d \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{2} \leq d \leq 3, d \in \mathbb{Z}$$

$$d = 2, 3$$

$$x_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$$

$$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$$

Итак: а) $x = \pi + \pi d, d \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$b) x_1 = \frac{11\pi}{3}; x_2 = 3\pi; x_3 = 5\pi$$

11) Комментарий: В работе два недостатка в решении тригонометрического уравнения. Ошибка в тригонометрии, в п. а) д. б. период $\pi/4 + \pi n/2$, в п. б) правильный ответ, но не показана отборка корней.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$\begin{aligned}
 \cos 2x + 0,5 &= \cos^2 x \\
 \cos^2 x - \sin^2 x + 0,5 &= \cos^2 x \\
 \sin^2 x &= 0,5 \\
 |\sin x| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} & \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\
 \delta) \quad [-2\pi; -\frac{\pi}{2}] & \\
 -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} &
 \end{aligned}$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$

12) Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пункте а. В пункте б неправильно произведен отбор корней (при правильном ответе).

Оценка эксперта: 1 балл.

ФИПИ

а) Решите уравнение

$$2\log_4(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}.$

Обоснованно получен
верный ответ в пункте
а, отбор корней
произведен неверно
(при правильном
ответе) – **1 балл**

а) Пусть $\log_4(4\sin x) = t; t > 0; \cos x$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = 2; t_2 = \frac{1}{2}$$

1) $\log_4(4\sin x) = 2$

$$4^2 = 4\sin x$$

$$4\sin x = 16$$

$$\sin x = 4 - \text{нет решений, т.к.}$$

$$\sin x < 1.$$

ОДЗ: $4\sin x > 0$

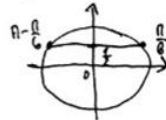
$$\sin x > 0$$

2) $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$

$$4^{\frac{1}{2}} = 4\sin x$$

$$4\sin x = 2$$

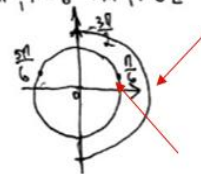
$$\sin x = \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}; n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б) $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$



$$-\frac{4\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = -\frac{9\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = -\frac{4\pi}{6}$$

Ответ: б) $-\frac{4\pi}{6}$

13) Комментарий.

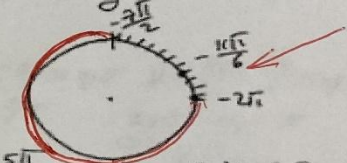
Обоснованно получен ответ в пункте а. В пункте б неправильно выделена часть окружности, которая должна соответствовать данному отрезку.

Оценка эксперта: 1 балл.

а) $\sin x + 2 \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \cdot \sin 2x + 1$
 $\sin x + 2 \left(\sin(2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(2x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{3} \cdot \sin 2x + 1$
 $\sin x + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \right) = \sqrt{3} \cdot \sin 2x + 1$
 $\sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(2x) + \cos(2x) = \sqrt{3} \cdot \sin(2x) + 1$
 $\sin x + \cos 2x = 1$
 $\sin x + 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 1$
 $2 \sin^2 x - \sin x = 0$
 $2 \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0$
 $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$
 $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$
 Отберём корни с помощью единичной окружности:
 -2π
 $-2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

Ответ: а) $x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{11\pi}{6}$; -2π



14) Комментарий.

учитель будущего

Обоснованно получен ответ в пункте а. В пункте б допущена вычислительная ошибка в решении двойного неравенства. Должно быть $-11\pi/3$, а написано $-14\pi/3$, но потом все шаги выполнены верно.

Оценка эксперта: 1 балл.

$N=13$

а) $2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cos x \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}(1 - \sin^2 x) = \cos x - 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + 2 \sin^2 x - 2 = -2$

$\Leftrightarrow \sin x (2 \sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ответ а): $\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$

б) $-\frac{5\pi}{2} \leq x \leq -\pi$

$\Leftrightarrow$ Разбор случаев:

1) $-\frac{5\pi}{2} \leq \pi n_1 \leq -\pi, \text{ где } n_1 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq n_1 \leq -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = -1 \\ n_1 = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi \\ x = -2\pi \end{cases}$

2) $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n_2 \leq -\pi, \text{ где } n_2 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\frac{17\pi}{6} \leq 2\pi n_2 \leq -\frac{11\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{17}{6} \leq n_2 \leq -\frac{11}{6}$

$\Leftrightarrow n_2 \in \emptyset$

3) $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n_3 \leq -\pi, \text{ где } n_3 \in \mathbb{Z}$

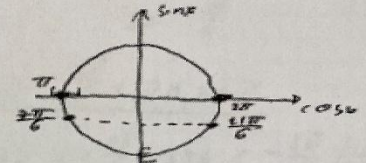
$\Leftrightarrow -\frac{13\pi}{6} \leq 2\pi n_3 \leq -\frac{17\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{13}{6} \leq n_3 \leq -\frac{17}{6}$

$\Leftrightarrow n_3 = -2$

$\Rightarrow x = -\frac{13\pi}{6}$

Ответ: $-\pi, -2\pi, -\frac{13\pi}{6}$



15) Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пункте а. В пункте б лишний корень при $k=0$.

Оценка эксперта: 1 балл.

а) $\frac{4}{1-\cos^2 x} + \frac{9}{\sin x} = 10$ 0.3
 $\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{9}{\sin x} - 10 = 0$ $\sin x \neq 0$

$4 + 9\sin x - 10\sin^2 x = 0$

Заменим: $\sin x = t$ $t \in [-1, 0) \cup (0, 1]$

$10t^2 - 9t - 4 = 0$

$D = 81 - 4 \cdot 10 \cdot (-4) = 361$

$t_1 = -\frac{1}{2}$ (уг.)

$t_2 = \frac{10}{10}$ (не уг. условие замены)

0.3. $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}]$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$-3\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2} \quad | : \pi \quad | \cdot 6$

$-18 \leq -1 + 12k \leq -9$

$k = -1$ $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}$

к=0 $x = -\frac{\pi}{6}$

$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$-3\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2} \quad | : \pi \quad | \cdot 6$

$-18 \leq -5 + 12n \leq -9$

$-13 \leq 12n \leq -4$

$n = -1$ $x = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

16) Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте а), но неверная запись корней в п. б).

Оценка эксперта: 1 балл.

а) Решите уравнение

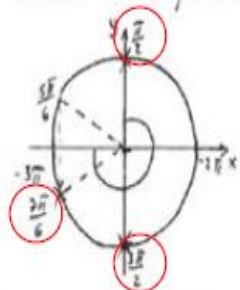
$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

$$\text{б) } -\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}.$$

б) Найдём корни уравнения на отрезке $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Для этого нарисуем тригонометрическую окружность.



$$x_1 = -2\frac{5\pi}{6}; x_2 = -2\frac{\pi}{2}; x_3 = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: а) } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } x = -2\frac{5\pi}{6}; -2\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2};$$

N13

$$\text{а) } \cos 2x + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2 \cos^2 x - 1 + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0$$

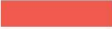
$$\cos x (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

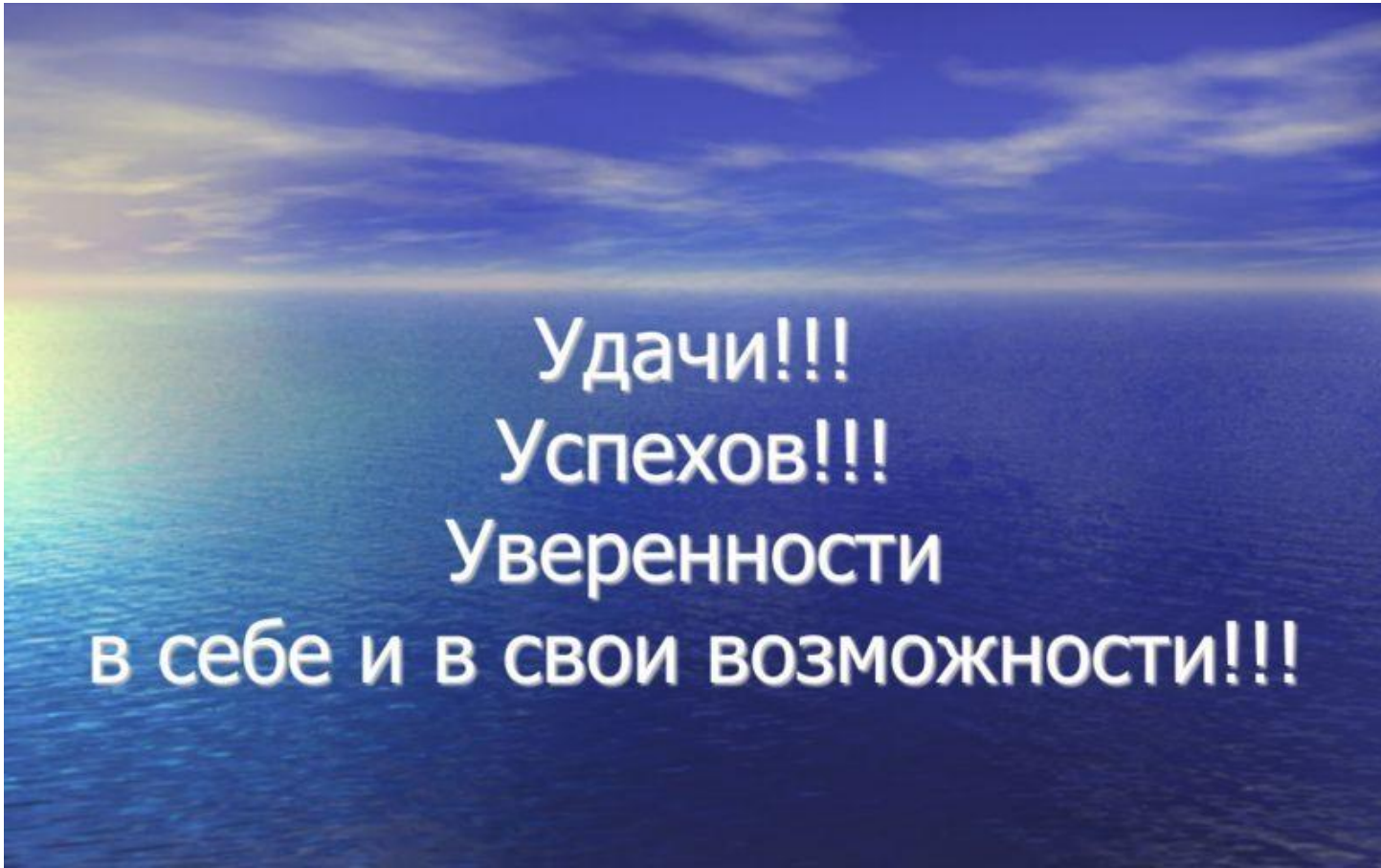
$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

В целях совершенствования преподавания курса математики и подготовки к ЕГЭ я рекомендую:

- Применять на уроках математики уровневую дифференциацию (базовый и профильный уровни), которая позволяет учителю сделать уроки математики для всех групп обучающихся с разной математической подготовкой более продуктивными и осмысленными, а также создать условия, при которых каждый обучающийся будет участвовать в посильной интеллектуальной математической деятельности, дающей осязаемые плоды.
 - В своей работе следует использовать задания открытого сегмента федерального банка тестовых заданий, размещенных на сайте ФИПИ, а также разнообразные образовательные ресурсы сети Интернет (Якласс, Статград), разработанные для подготовки выпускников к ЕГЭ по математике. Они помогут отработать большое количество разнообразных задач по содержательным разделам курса математики разного уровня (от простого к сложному), рассмотреть их различные способы решения.
 - В процессе обучения математики необходимо проводить тренировочные работы, используя контрольные измерительные материалы, аналогичные материалам единого государственного экзамена.
- 



Удачи!!!
Успехов!!!
Уверенности
в себе и в свои возможности!!!



СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!

учитель будущего