



Методика обучения
решению
дробно - рациональных
неравенств
(9-10 классы).
Одна из ключевых тем,
из - за которой дети
"проваливаются" на
ряду
заданий ЕГЭ и ОГЭ.

Овсянкина Оксана Алексеевна

Учитель
математики
МБОУ СОШ № 28

 **учитель будущего** 

В школьном курсе математики можно выделить пять основных числовых и функционально-алгебраических линий, которые применяются в решении неравенств:

- Целые числа, степени с натуральным показателем, целые алгебраические выражения,
- целые рациональные функции;
- Дроби, степени с целым отрицательным показателем, алгебраические дроби,
- дробно-рациональная функция;
- Корни, степени с дробным показателем, иррациональные алгебраические выражения,
- иррациональные функции;
- Степени с действительным показателем, показательные выражения, показательная функция;
- Логарифмы, логарифмические выражения, логарифмическая функция.
- В соответствии с этой классификацией можно выделить **шесть** основных типов неравенств, изучаемых в школе:

Метод равносильных преобразований. Не требует проверки найденных решений путем их подстановки в данное неравенство и является одним из основных методов решения неравенств.

Пример 1 (Задание № 20 на ОГЭ)

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7); (x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0; (x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0,$$

Произведение двух множителей отрицательно, если множители разных знаков. Рассмотрим два случая.

$$\text{Первый случай: } \begin{cases} x-7 < 0, \\ x-7-\sqrt{11} > 0; \end{cases} \begin{cases} x < 7, \\ x > 7+\sqrt{11}, \end{cases} \text{ решений нет.}$$

$$\text{Второй случай: } \begin{cases} x-7 > 0, \\ x-7-\sqrt{11} < 0; \end{cases} \begin{cases} x > 7, \\ x < 7+\sqrt{11}, \end{cases} 7 < x < 7+\sqrt{11}.$$

Решение исходного неравенства: $7 < x < 7+\sqrt{11}$.

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.

Пример 2 (Задание № 15 на ЕГЭ)

учитель будущего

$$\log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2$$

Решение: данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$$\log_{4-x} (x+3) - \log_{4-x} (x-4)^2 \geq -2$$

$$\log_{4-x} (x+3) \geq 0$$

$$\log_{4-x} (x+3) \geq \log_{4-x} 1$$

$$\log_{4-x} (x+3) - 2 \log_{4-x} |4-x| \geq -2, \log_{4-x} (x+3) - 2 \geq -2$$

$$\left[\begin{cases} 4-x > 1, \\ x+3 \geq 1; \\ 0 < 4-x < 1, \\ x+3 \leq 1; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x < 3, \\ x \geq -2; \\ 3 < x < 4, \\ x \leq -2 \end{cases} \right.$$

$$-2 \leq x < 3.$$

Ответ: $[-2; 3)$

Метод интервалов или с помощью графика.

учитель будущего

Пример 1 (Задание № 20 на ОГЭ).

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7); x^2 - (14 + \sqrt{11})x + 49 + 7\sqrt{11} < 0.$$

Рассмотрим функцию $y = x^2 - (14 + \sqrt{11})x + 49 + 7\sqrt{11}$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

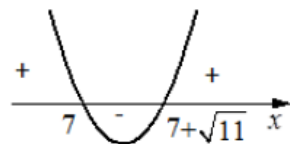
Найдем нули функции: $x^2 - (14 + \sqrt{11})x + 49 + 7\sqrt{11} = 0$;

$$x = \frac{14 + \sqrt{11} - \sqrt{11}}{2}, x = \frac{14 + \sqrt{11} + \sqrt{11}}{2}; x = 7, x = 7 + \sqrt{11}.$$

Схематично изобразим параболу

$$y = x^2 - (14 + \sqrt{11})x + 49 + 7\sqrt{11}.$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (7; 7 + \sqrt{11})$$



Ответ: $(7; 7 + \sqrt{11})$.

Метод интервалов:

учитель будущего

x22

$$\begin{cases} x^2 - 24 \geq 2x \\ 2(x-1) \leq 3x+2 \end{cases}$$

- Решим первое нерав. методом интервалов:

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100 = 10^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 10}{2} = 6$$

(рисунок дальше)

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 10}{2} = -4$$

- решим второе нерав. методом ч.

$$2(x-1) \leq 3x+2$$

$$2x - 2 - 3x \leq +2$$

$$-1x \leq 4 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \geq -4$$

- нарисуем и сопоставим



Ответ: $[6; \infty) \cup (-4; \infty)$

Пример 2 (Задание № 15 на ЕГЭ)

учитель будущего

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$$

Решение:
Пусть $f(x) = \frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} - 1$

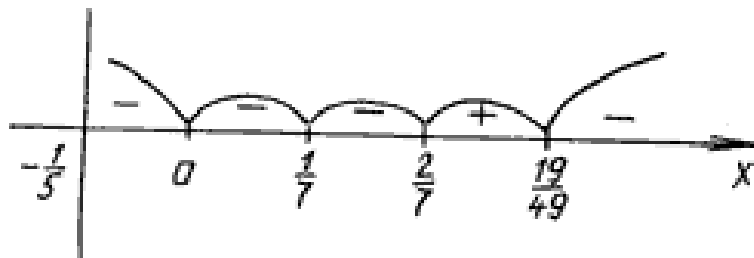
Необходимо решить неравенство $f(x) \leq 0$. Область определения функции f определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 5x+1 > 0, \\ (7x-1)^2 > 0, \\ (7x-1)^2 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{1}{5}, \\ x \neq \frac{1}{7}, \\ x \neq 0, \\ x \neq \frac{2}{7}; \end{cases}$$

$$\text{Итак, } D(f) = \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$$

Найдем нули функции f :

$\log_3 (5x + 1) = \log_3 (7x - 1)^2$,
откуда $49x^2 - 19x = 0$, $x = 0$ – посторонний корень, $x =$
 $\frac{19}{49}$ корень уравнения.



Ответ: $\left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{19}{49}; +\infty\right)$

Разложение на множители (в том числе группировка)

учитель будущего

Решение неравенств методом интервалов или иным методом во многих случаях требует некоторых предварительных действий, такими преобразованиями в том числе являются различные способы разложения на множители.

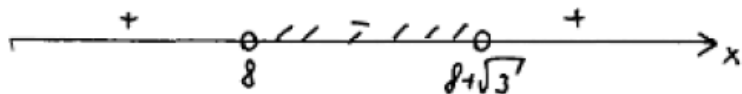
Пример 1 (Задание № 20 на ОГЭ).

521

$$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$$

$$\cancel{(x-8)} \cancel{(x-8)} (x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$$

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$$



$$x \in (8, 8+\sqrt{3})$$

$$\text{Ответ } x \in (8, 8+\sqrt{3})$$

Пример 2 (Задание № 15 на ЕГЭ)

Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{2x-3}}{3x-1} \leq \frac{\sqrt{2x-3}}{2x+1}$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{2x-3}}{3x-1} - \frac{\sqrt{2x-3}}{2x+1} \leq 0;$$

$$\sqrt{2x-3} \cdot \left(\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \leq 0;$$

$$\sqrt{2x-3} \cdot \frac{2x+1-(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)} \leq 0;$$

$$\frac{\sqrt{2x-3}(2-x)}{(3x-1)(2x+1)} \leq 0$$

Дальнейшее решение неравенства можно провести методом интервалов.

Ответ: $\{1, 5\} \cup [2; +\infty)$

Метод введения новой переменной. Основной идеей метода является замена повторяющегося алгебраического выражения в данном неравенстве некоторой буквой, играющей роль новой переменной. Решив после такой замены неравенство относительно новой переменной, нужно сделать обратную замену, вернувшись к данной переменной, и решить полученные неравенства уже относительно данной переменной.

Пример 1 (Задание № 20 на ОГЭ).

4. Решите неравенство методом замены переменной:

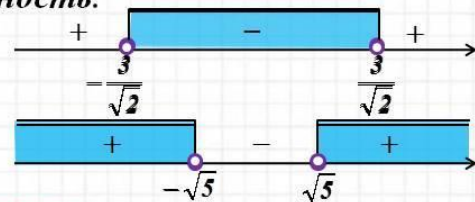
$$2(x^2 - 4)^2 - 3(x^2 - 4) + 1 > 0 \quad \text{Замена: } x^2 - 4 = t$$

$$2t^2 - 3t + 1 > 0$$



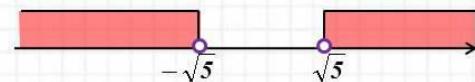
$$t \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty) - \text{совокупность.}$$

$$\begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ t > 1 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4 < \frac{1}{2} \\ x^2 - 4 > 1 \end{cases} \begin{cases} x^2 - \frac{9}{2} < 0 \\ x^2 - 5 > 0 \end{cases}$$



объединение

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$$



Пример 2 (Задание № 15 на ЕГЭ)

учитель будущего

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Решение.

Пусть

$t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4}$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t - 3)(t - 4)} - \frac{t - 3}{(t - 3)(t - 4)} \leq 0 \quad t \neq 4$$

$$t - 6 - \frac{10}{t - 3} \leq 0 \quad \frac{(t - 1)(t - 8)}{t - 3} \leq 0 \quad t \neq 4 \quad \text{откуда} \quad \begin{matrix} t \leq 1 & 3 < t < 4 \\ 4 < t \leq 8 \end{matrix}$$

При $t \leq 1$ получим: $2^x \leq 1$, откуда $x \leq 0$

При $3 < t < 4$ получим: $3 < 2^x < 4$, откуда $\log_2 3 < x < 2$.

При $4 < t \leq 8$ получим: $4 < 2^x \leq 8$, откуда $2 < x \leq 3$.

Решение исходного неравенства: $x \leq 0$; $\log_2 3 < x < 2$; $2 < x \leq 3$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

Применение свойств функций к решению неравенств. Существует довольно большой класс неравенств, решение которых только с помощью стандартных методов (алгебраических преобразований, замены переменной, метода интервалов и метода знакотждественных множителей) невозможно. Решение таких неравенств опирается на некоторые свойства элементарных функций, изучаемых в школьном курсе, прежде всего монотонность и ограниченность. В некоторых случаях приходится использовать свойства периодичности, четности (нечетности), инвариантности, дифференцируемости, а также графические интерпретации неравенств.

Пример (Задание № 15 на ЕГЭ)

Решите неравенство: $7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x + 16 < 0$

Решение: Заметим, что функция $f(x) = 7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x + 16$

монотонно возрастает на всей числовой прямой, т.к. является суммой возрастающих функций) и $f(-1) = 0$.

Поэтому неравенство $f(x) < 0$ выполняется в том и только в том случае, если $x < -1$

Ответ: $(-\infty; -1)$.

**Метод рационализации (метод декомпозиции,
метод замены множителей, метод замены
функции, правило знаков)**

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
1a	$\log_a f - 1$	$(a-1)(f-a)$
1б	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
2a	$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
2б	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ ($g \neq 1, f \neq 1$)	$(f-1)(g-1) \times$ $\times (h-1)(g-f)$
4	$h^f - h^g$ ($h > 0$)	$(h-1)(f-g)$
4a	$h^f - 1$	$(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ ($f > 0; g > 0$)	$(f-g)h$
6	$ f - g $	$(f-g)(f+g)$

Некоторые следствия (с учетом области определения неравенства):

- $\bullet \log_h f \cdot \log_p q \vee 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(q-1) \vee 0$
- $\bullet \log_h f + \log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg-1)(h-1) \vee 0$
- $\bullet \sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f - g \vee 0$
- $\bullet \frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{f-g}{p-q} \vee 0$

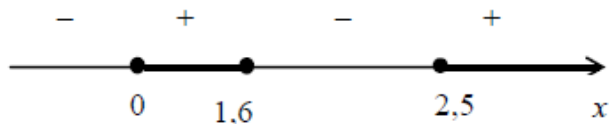
Пример 1 (Задание № 20 на ОГЭ).

учитель будущего

Решение. $\frac{|x^2 - 5x + 4|}{|x^2 - 4|} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - |x^2 - 4| \leq 0, \\ x^2 - 4 \neq 0. \end{cases}$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} (x^2 - 5x + 4 - x^2 + 4)(x^2 - 5x + 4 + x^2 - 4) \leq 0, \\ x \neq -2, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5x - 8)(2x - 5)x \geq 0, \\ x \neq -2, x \neq 2. \end{cases}$$



$$x \in [0; 1,6] \cup [2,5; +\infty).$$

Ответ: $[0; 1,6] \cup [2,5; +\infty).$

Пример 2 (Задание № 15 на ЕГЭ)

учитель будущего

Решите неравенство: $\frac{4^{x^2+3x-2} - (0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \leq 0$

Решение:

$$\frac{2^{2x^2+6x-4} - 2^{-2x^2-2x+1}}{5^x - 5^0} \leq 0;$$

$$\frac{2x^2 + 6x - 4 - (-2x^2 - 2x + 1)}{x - 0} \leq 0;$$

$$\frac{4x^2 + 8x - 5}{x} \leq 0;$$

$$\frac{(x + 2,5)(x - 0,5)}{x} \leq 0$$

Последнее неравенство^x решаем методом интервалов.

Ответ: $(-\infty; -2,5] \cup (0; 0,5]$

Пример 3 (задание 15).

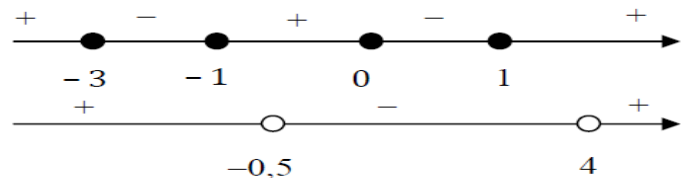
учитель будущего

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leq 2$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \leq 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4) \leq 0 \\ 4+7x-2x^2 > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x+2)^2-1)(-3x^2+3x) \leq 0 \\ (x+0,5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geq 0 \\ (x+0,5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Ответ: $(-0,5; 0] \cup [1; 4)$.

Решите неравенство $\frac{|2x^2 - 11x + 10| - x^2}{|6x^2 - 11x + 4| - 1} \geq 0$

Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt[3]{3x^2 + 4x - 2} + \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}} \geq 0$

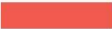
Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$

В решении неравенств на ОГЭ, ЕГЭ, а также в РДР проверяется умение решать целые рациональные неравенства, дробно – рациональные, иррациональные, логарифмические, показательные неравенства. **Причем, зачастую область определения неравенства находится на первом этапе решения, но ученик не понимает, что полученные ограничения повлияют на дальнейшие преобразования.** Можно порекомендовать при обучении решению неравенств повышенной сложности для учащихся соответствующего уровня подготовки сформировать и использовать подборку заданий на отработку свойств логарифмов, при применении которых происходит изменение области определения (как расширение, так и сужение).

Встречались ошибки на неверное включение, или исключение крайних точек искомых промежутков.

Задание 20.

Критерии оценки выполнения задания на
ОГЭ.



Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0,$$

откуда $7 < x < 7 + \sqrt{11}$.

Ответ: $(7; 7 + \sqrt{11})$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

Вычислительная
ошибка – ошибка,
допущенная при
выполнении
арифметических
действий:

сложении,
вычитании,
умножении,
делении

1) Комментарий.

Обоснованно получен ответ, но автор допускает опisku и затем ее не исправляет.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$\begin{aligned}
 (x-8)^2 &\leq \sqrt{3} \cdot (x-8) \\
 (x-8)^2 - \sqrt{3} \cdot (x-8) &\leq 0 \\
 (x-8)(x-8-\sqrt{3}) &\leq 0 \\
 \begin{cases} x+8 < 0 \\ x-8-\sqrt{3} > 0 \end{cases} \\
 \begin{cases} x+8 > 0 \\ x-8-\sqrt{3} < 0 \end{cases} \\
 \begin{cases} x < -8 \\ x > 8+\sqrt{3} \end{cases} \\
 \begin{cases} x > -8 \\ x < 8+\sqrt{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x > -8 \\ x < 8+\sqrt{3} \end{cases} \\
 &\text{Ответ: } x \in (-8; 8+\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0,$$

откуда $-8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $(-8; 8+\sqrt{3})$.

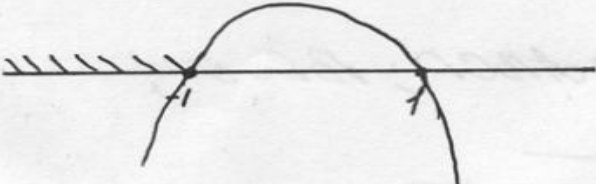
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

0 баллов

2) Комментарий.

Нарушен алгоритм решения квадратного неравенства.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$\begin{aligned}
 (5x-5)^2 &\geq (5x-5)^2 \\
 9x^2 - 30x + 25 &\geq 25x^2 - 30x + 9 \\
 9x^2 - \cancel{30x} + 25 - 25x^2 + \cancel{30x} - 9 &\geq 0 \\
 -16x^2 + 16 &\geq 0 \\
 -16x^2 &\geq -16 \\
 x^2 &\geq -16 : (-16) \\
 x &\leq 1 \\
 x &\leq 1; -1
 \end{aligned}$$


Ответ: $(-\infty; -1]$

3) Комментарий.

Автор работы вместо строгого знака неравенства ставит нестрогий, не учитывает область допустимых значений данного неравенства и меняет еще знак неравенства на противоположный.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$\sqrt{21.} \quad \frac{-16}{(x+2)^2-5} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)^2-5}{x} \leq 0$$

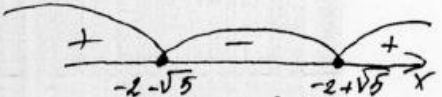
$$(x+2)^2-5 \geq 0$$

$$(x+2)^2-5 \leq 0$$

$$x^2+4x-1 \leq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{1} = -2 \pm \sqrt{5}$$



Ответ: $[-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}]$.

4) Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ, отличающийся от верного исключением точки -4. (потеряно значение $x = -4$).

Оценка эксперта: 0 баллов.

№17.

$$\begin{cases} x^2 - 24 \geq 2x \\ 2(x-1) \leq 3x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 24 = 0 \\ -x \leq 4 \quad | : (-1) \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 24 = 0 \\ x^2 - 2x - 24 = 0 \end{cases}$$

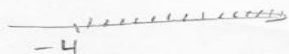
$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100 = 10^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 10}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 10}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4$$



 $x \geq -4$



Ответ: $x \in [6; +\infty)$

Рассмотрим критерии оценивания
решения неравенств уровня 10 класса и
типичные ошибки учащихся.

учитель будущего

15

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

1) Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ, отличающийся от верного исключением точки 0.
(потеряно значение $x=0$).

Оценка эксперта: 1 балл.

$$\begin{aligned} & \sqrt{15x^3 + x^2 - \frac{18x^2 - x + 2}{x-2}} \leq 1 \\ & x^3 + x^2 - \frac{18x^2 - x + 2}{x-2} - 1 \leq 0 \\ & \frac{x^3(x-2) + x^2(x-2) - (18x^2 - x + 2) - (x-2)}{x-2} \leq 0 \\ & \frac{x^4 - 2x^3 + x^3 - 2x^2 - 18x^2 + x + 2 - x + 2}{x-2} \leq 0 \\ & \frac{x^4 - x^3 - 20x^2}{x-2} \leq 0 \quad \text{OD } 3 \quad x \neq 2 \\ & \text{Решим уравнение} \\ & x^4 - x^3 - 20x^2 = 0 \\ & x^2(x^2 - x - 20) = 0 \\ & x^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - x - 20 = 0 \\ & x = 0 \quad D = 1 + 80 = 81 \\ & \quad \quad \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{2} \\ & \quad \quad \quad x_1 = 5 \\ & \quad \quad \quad x_2 = -4 \\ & \begin{array}{c} - \quad + \quad - \quad + \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ -4 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \end{array} \quad x \\ & x \in (-\infty; -4] \cup [2; 5] \end{aligned}$$

учитель будущего

2) Комментарий.

Нарушен алгоритм решения дробно – рационального неравенства.

Оценка эксперта: 0 баллов.

№15.

$$x^3 + 2x^2 - 2 \frac{24x^2 - x + 3}{x - 3} \leq 1$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 3$$

$$\frac{(x-3)(x^3+2x^2)}{x-3} - \frac{24x^2-x+3}{x-3} \leq 1$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^3 - 6x^2 - 24x^2 + x - 3}{x-3} \leq 1$$

$$x^4 - x^3 - 30x^2 + x - 3 \leq x - 3$$

$$x^4 - x^3 - 30x^2 + x - 3 - x + 3 \leq 0$$

$$x^4 - x^3 - 30x^2 \leq 0$$

$$x^2(x^2 - x - 30) \leq 0$$

$$x^2 \leq 0$$

$$\cancel{x \neq 0}$$

$$x = 0$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$D = 1 + 120 = 121$$

$$x_1 = \frac{1+11}{2} = 6$$

$$x_2 = -5$$



Ответ: $[-5; 3) \cup (3; 6]$

3) Комментарий.

Нарушен алгоритм решения дробно – рационального неравенства и неверно найдено ОДЗ.

Оценка эксперта: 0 баллов.

ФИПИ

учитель будущего

Решите неравенство $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$.

Ответ: $(-\infty; 1]; (\log_3 5; 2)$.

Решение:

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$
$$\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3 + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^x \cdot 3 - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leq t + 5$$
$$\frac{(t^2 - 6t + 4)(t - 9) + (6t - 51)(t - 5)}{(t - 5)(t - 9)} \leq (t + 5)(t - 5)(t - 9)$$
$$t^3 - 6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 \leq t^3 - 25t - 9t^2 + 225$$
$$-6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 - t^3 + 25t + 9t^2 - 225 \leq 0$$
$$-t^3 - 6t^2 - 21t + 194 \leq 0$$

$2t - 6 = 0$
 $2t = 6$
 $t = 3$

$3^x = 3$
 $x = 1$
 $x \leq 1$

$3^x - 5 > 0$
 $3^x = 5$
 $x > \log_3 5$

$3^x - 9 > 0$
 $3^x = 9$
 $x > 2$

ОДЗ: $t \neq 5$ и $t \neq 9$

График:

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

0 баллов

4) Комментарий.

Область допустимых значений найдено верно, но не учтено при написании ответа $x > 1/2$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

учитель будущего

$$15) \log_2(2x^2+12) - \log_2(x^2-x+12) \geq \log_2(2-\frac{1}{x})$$

$$\log_2\left(\frac{2x^2+12}{x^2-x+12}\right) \geq \log_2\left(2-\frac{1}{x}\right)$$

$f(z) = \log_2 z$ монотонно возрастает.

Метод рационализации:

$$\begin{cases} \frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \geq 2-\frac{1}{x} (*) \\ 2x^2+12 > 0 \\ x^2-x+12 > 0 \\ 2-\frac{1}{x} > 0 \end{cases}$$

$$(*): \frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \geq 2-\frac{1}{x}$$

$$\frac{2x^2+12}{x^2-x+12} - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\frac{(2x^2+12)x - 2x(x^2-x+12) + x^2-x+12}{x(x^2-x+12)} \geq 0$$

$$\frac{2x^3+12x-2x^3+2x^2-24x+x^2-x+12}{x(x^2-x+12)} \geq 0$$

$$\frac{3x^2-13x+12}{x} \geq 0$$

$$\frac{3(x-3)(x-\frac{4}{3})}{x} \geq 0$$

$$-\frac{0}{0} + \frac{4}{3} - \frac{3}{0} +$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq \frac{4}{3} \\ 3 \leq x \end{cases}$$

Ответ: $(0; \frac{4}{3}]; [3; +\infty)$

$$\begin{cases} 2x^2+12 > 0 \\ x^2-x+12 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ 2-\frac{1}{x} > 0 \\ \begin{cases} x^2 > -4 & x \in \mathbb{R} \\ \frac{2x-\frac{1}{x}}{x} > 0 \\ \frac{x-\frac{1}{x}}{x} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

~~2x^2+12 > 0~~

~~x^2-x+12 > 0~~

~~2-\frac{1}{x} > 0~~

~~x^2 > -4~~

~~\frac{2x-\frac{1}{x}}{x} > 0~~

~~\frac{x-\frac{1}{x}}{x} > 0~~

~~+~~ ~~0~~ ~~-~~ ~~\frac{1}{x}~~ ~~+~~

~~+~~ ~~0~~ ~~-~~ ~~\frac{1}{x}~~ ~~+~~

~~[x < 0]~~

~~[x > \frac{1}{2}]~~

$x^2-x+12 > 0$
при всех x

5). Комментарий.

Область допустимых значений автор находит неверно, даже не понимает, что только x относится к логарифму, а не $(x-9)$; также и $(x-3)$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$\sqrt{15} \frac{\log_4(64x)}{\log_4(x-3)} + \frac{\log_4(x-3)}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x + 6}{\log_4^2 x - 9} \quad \text{найдем ОДЗ:}$$

$64x > 0 \Rightarrow x > 0$
 $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$
 $2^4/6 > 0$, мы имеем x
 $x-9 > 0, x > 9$
 $\log_4(x-3) \neq 0 \Rightarrow x-3 \neq 1$
 $x \neq 4$

продолжение ОДЗ: $\log_4 64x \neq 0$; $\log_4(x-9) \neq 0$
 $64x \neq 1$ $x-9 \neq 1$
 $x \neq \frac{1}{64}$ $x \neq 10$

также ОДЗ

6) Комментарий.

Удовлетворяет критерию на 1 балл, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.

Оценка эксперта: 1 балл.

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^x - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$3^x = t; t > 0$$

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} - t - 5 \leq 0$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 4)(t - 9) + (6t - 51)(t - 5) - (t + 5)(t - 5)(t - 9)}{(t - 5)(t - 9)} \leq 0$$

$$\frac{2(t - 18)}{(t - 5)(t - 9)} \leq 0$$

$$t \in (0; 5) \cup (9; 18]$$

$$3^x \in (0; 5) \cup (9; 18]$$

$$x \in (-\infty; \log_3 5) \cup (2; \log_3 18]$$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_3 5) \cup (2; \log_3 18]$

ОДЗ:

$$3^x - 5 \neq 0$$

$$3^x \neq 5$$

$$x \neq \log_3 5$$

$$3^x - 9 \neq 0$$

$$3^x \neq 9$$

$$x \neq 2$$

Ответ: $(-\infty; 1]; (\log_3 5; 2)$.

1 балл

Удовлетворяет критерию на 1 балл: обоснованно получен верный ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех шагов решения

7) Комментарий.

Нарушен алгоритм решения рационального неравенства. Рассмотрен один случай решения равносильных преобразований.

Оценка эксперта: 0 баллов.

$$\begin{aligned}
 x^2 \cdot \log_{25}(2-x) &\geq \log_5(x^2 - 4x + 4) \quad \text{ОБЗ} \\
 x^2 \cdot \log_5^{(2-x)} &\geq \log_5(x-2)^2 \\
 \frac{x^2}{4} \cdot \log_5^{2-x} &\geq 2 \log_5|x-2| \\
 \left(\frac{x^2}{4} - 2\right) \cdot (\log_5^{2-x}) &\geq 0 \\
 \frac{1}{4}(x^2 - 8) \log_5^{2-x} &\geq 0 \\
 (x^2 - 8) \cdot \log_5^{2-x} &\geq 0
 \end{aligned}$$

П.к. по ОБЗ $2-x > 0$,
то левая часть раскроем:
 $|x-2| = 2-x$

Умножим, чтобы знаки были одинаковы на $\log_5^{2-x}$. Для этого найдём $\log_5^{2-x}$, при котором $\log_5^{2-x} > 0$, на которых $\log_5^{2-x} < 0$.

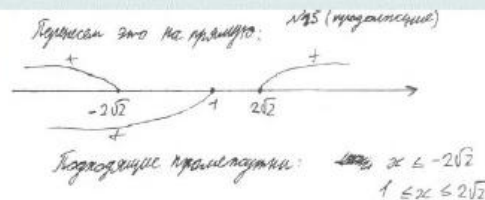
① $x^2 - 8 \geq 0$ ② $\log_5^{2-x} > 0$

$x^2 \geq 8$ $\log_5^{2-x} \geq \log_5^1$

$\begin{cases} x \geq 2\sqrt{2} \\ x \leq -2\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2-x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Решите неравенство $x^2 \log_{25}(2-x) \geq \log_5(x^2 - 4x + 4)$.

Ответ: $(-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [1; 2)$.



ОБЗ: $2-x > 0 \Rightarrow$
 $x < 2$

После пересечения ОБЗ:
 $x \leq -2\sqrt{2}$
 $1 \leq x < 2$

Ответ: $(-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [1; 2)$.

0 баллов



Удачи!!!
Успехов!!!
Уверенности
в себе и в свои возможности!!!



СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!

учитель будущего