КУРО
КОРПОРАТИВНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

ЦНППМ
ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Формирование умения решать геометрические задачи на вычисление расстояний между точками, от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми.

Захаренко Марина Викторовна

учитель математики МБОУ «Гимназия» г.о Серпухова, г. Протвино

КУРО
КОРПОРАТИВНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

ЦНППМ
ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Цель освоения программы учебного курса «Геометрия» на базовом уровне обучения – общеобразовательное и общекультурное развитие обучающихся через обеспечение возможности приобретения и использования систематических геометрических знаний и действий, специфичных геометрии, возможности успешного продолжения образования по специальностям, не связанным с прикладным использованием геометрии.

КУРО
КОРПОРАТИВНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

ЦНППМ
ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

№ задания 14(задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл 3)

Проверяемые требования к предметным результатам освоения основной образовательной программы

Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, величина угла, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; площадь фигуры, объём фигуры, многогранник, поверхность вращения, площадь поверхности, сечение; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения; использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объём, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии

Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне (20 мин.)

Некоторые итоги ЕГЭ по математике профильного уровня в 2025 году:

- рост на 30 тыс.выбора математики профильного уровня;
- рост на 18 тыс. числа потенциальных абитуриентов массовых инженерных и IT-специальностей (набравших не менее 60 баллов), эти выпускники решают и задачи с развернутым ответом;
- заметное снижение доли, набравших неполный балл при решении задачи 14, что говорит о росте математической культуры участников экзамена, которые стали заметно чаще доводить до конца выполнение задания, в котором найден путь решения, избегая ошибок в выкладках и недочетов в обоснованиях.

Задание	Средний процент выполнения	Группа 1, 0–4 ПБ	Группа 2, 5–10 ПБ	Группа 3, 11–17 ПБ	Группа 4, 18–32 ПБ
14	6,0	0,0	0,14	2,8	41,1

КУРО
КОРПОРАТИВНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

ЦНППМ
ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Определения и теоремы.

Определения: расстояния от точки до прямой, от точки до плоскости, между параллельными прямой и плоскостью, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми.

Определение прямой, перпендикулярной плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

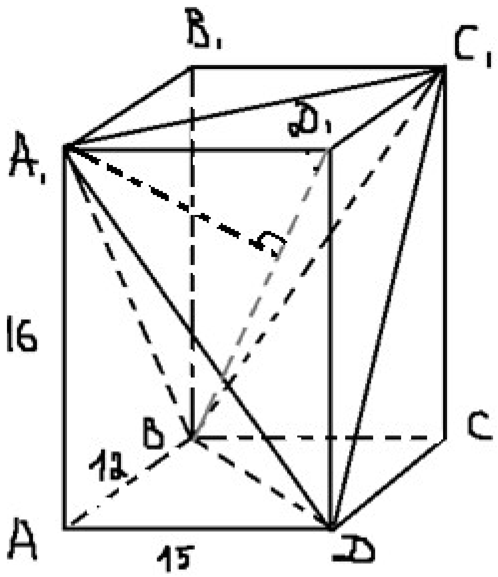
Теорема о трех перпендикулярах и обратная ей.

Сопутствующие теоремы: признак параллельности прямой и плоскости, признак параллельности плоскостей, признак перпендикулярности плоскостей.

Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.

а) Докажите, что объем пирамиды A_1BDC_1 втрое меньше объема параллелепипеда.

б) Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1



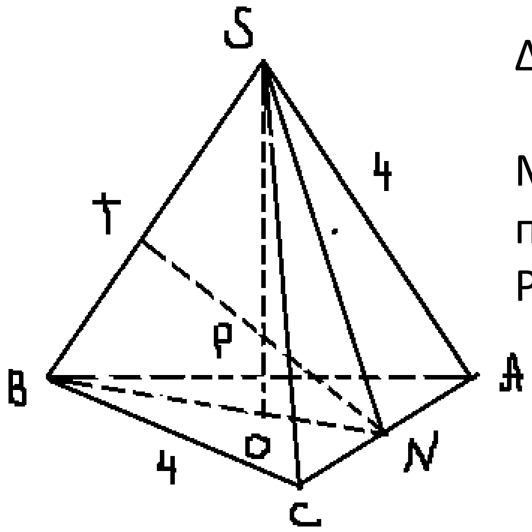
б) В Δ ABA_1 по теореме Пифагора найдем $A_1B = 20$; по свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда $BD_1 = 25$, $A_1D_1 = 15$ по условию. По теореме, обратной теореме Пифагора, устанавливаем, что Δ BD_1A_1 прямоугольный с прямым углом D_1A_1B; расстояние от точки A_1 до прямой BD_1 будет длина перпендикуляра, проведенного из вершины A к гипотенузе BD_1: $\frac{A1D1 * A1B}{BD1} = \frac{15 * 20}{25} = 12$

Ответ: 12.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.



Δ NSB - равнобедренный, NS = NB – высоты равносторонних треугольников. По теореме Менелая $\frac{BT}{TS} * \frac{SP}{PO} * \frac{ON}{NB} = 1$, $\frac{BT}{TS} * \frac{3}{1} * \frac{1}{3} = 1$, BT = TS, NT – медиана и высота в Δ NSB, NT перпендикулярно SB.

Расстоянием от точки B до прямой NP будет длина отрезка BT = ½ BS = 2.

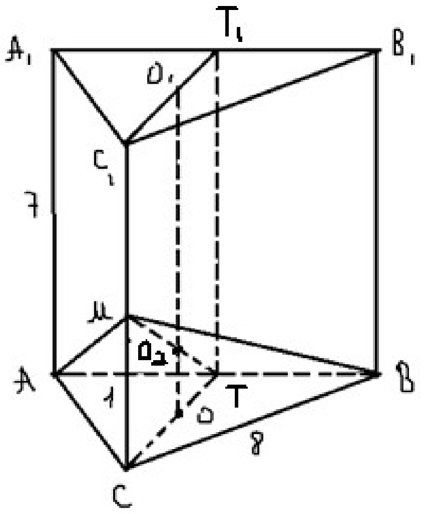
Ответ: 2.

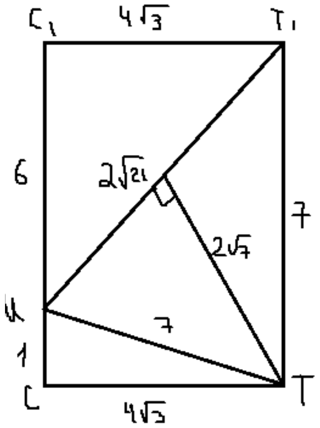
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 7. На ребре CC_1 отмечена точка M, причем $CM = 1$.

а) Точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM.

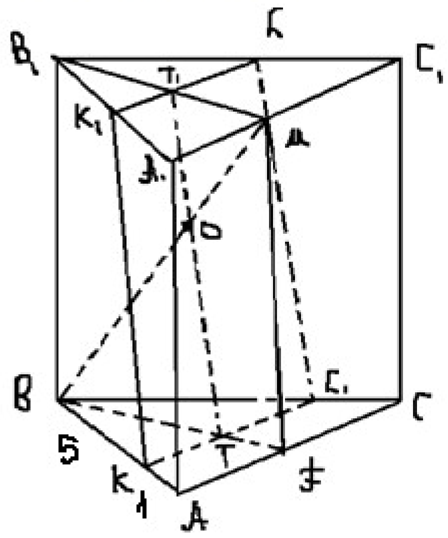
Решение. а) O –центр треугольника ABC, точка пересечения медиан, CO:OT = 2:1. $OO_1 \parallel CC_1$.По теореме о пропорциональных отрезках, пересекающих стороны угла, CO:OT = MO2 : O2T = 2 : 1, MT- медиана, т. Обр. прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника *ABM.*

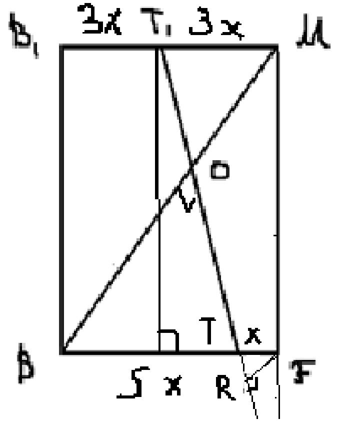




б) $A_1B_1 \parallel ABM$, расстоянием от точки A_1 до плоскости *ABM будет* расстояние от точки T_1 до плоскости *ABM*. Найдем все стороны треугольника MT_1T, его площадь и высоту к стороне MT(d): $S = 14\sqrt{3}$, $d = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.





В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

а) K_1LL_1K - сечение(плоскость γ), параллельное ребру AC, пересекается с плоскостью BB_1MF, содержащей прямую BM, по прямой TT_1. O – точка пересечения TT_1 и B. MF –перпендикуляр к плоскости основания призмы, BM – наклонная, BF –её проекция, BF и BM перпендикулярны L_1K. Перпендикулярность BM и TT_1 установим с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора: $BF = 3\sqrt{3}$(высота равностороннего треугольника ABC) , $BM = 6$, $BO = 5/8\ BM = 15/4$ (из подобия треугольников T_1OM и BOT) ; $TT_1 = 2\sqrt{3}$, $OT = 5/8\ TT_1 = 5/4\sqrt{3}$, $BT = 5/6BF = 5/2\sqrt{3}$. Т обр. $BT^2 = OT^2 + BO^2$, $\angle BOM = 90^0$.

Перпендикулярность прямой BM и плоскости γ установлена.

б) AC II γ, расстояние от точки C равно расстоянию от точки F до плоскости γ. Из подобия треугольников TOB и RTF: $RF = 1/5BO = 3/4$.

Ответ: ¾.

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём AM = DN = 4 и AK = 3.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

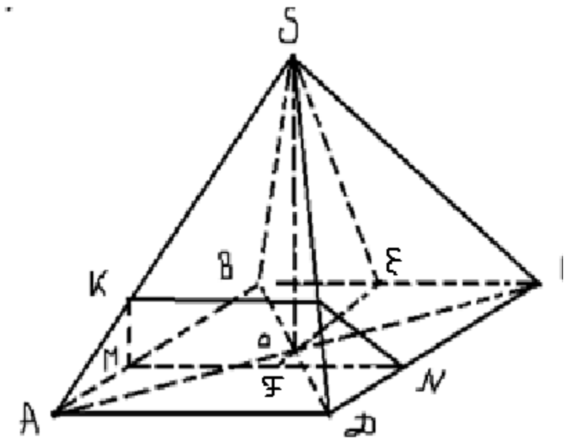
б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SB

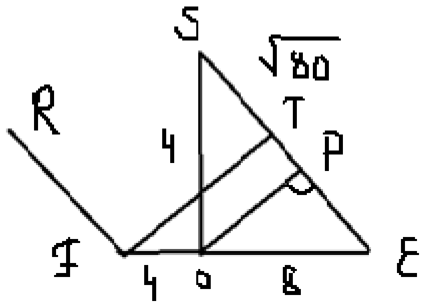
Решение. а) MN II BC, MK II SB из подобия треугольников AKM и SAB. Плоскости MNK и SBC параллельны по признаку параллельности плоскостей.

б) прямые BC и MN перпендикулярны плоскости SOE. Плоскость SOE пересекает параллельные плоскости MNK и SBC , которые перпендикулярны ей, по параллельным прямым SE и FR. Расстоянием между ними будет длина отрезка FT, параллельного высоте OP треугольника SOE.

OP =(4*8)/√80, FT = 12/8 OP = $\frac{12}{\sqrt{5}}$

Ответ : $\frac{12}{\sqrt{5}}$





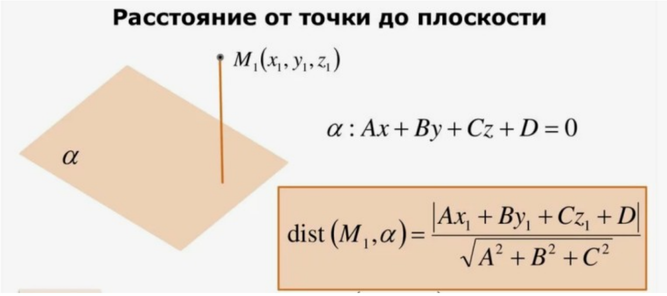
КОРПОРАТИВНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Некоторые способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми:

Нахождение длины общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых.

Поиск расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, проходящей через другую прямую, в том числе и с помощью метода координат с применением формулы



Вычисление расстояния между двумя параллельными плоскостями, проходящими через заданные скрещивающиеся прямые.

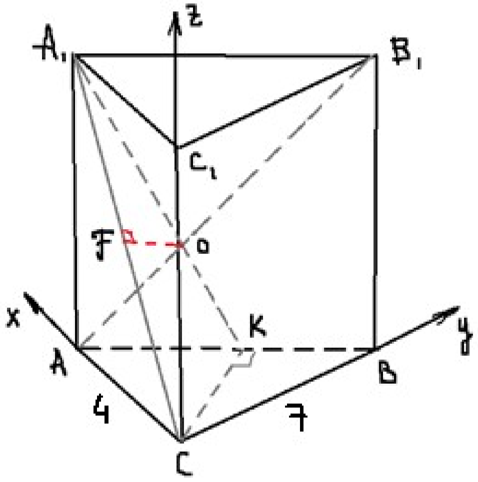
Нахождение расстояния от точки, являющейся проекцией одной из скрещивающихся прямых, на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на ту же плоскость.

Метод объемов.

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

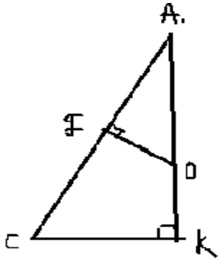
а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.



а) перпендикулярность прямых CA_1 и AB_1 можно установить методом координат.

б)прямая AB_1 перпендикулярна прямой CA_1 и прямой CK(по теореме о трёх перпендикулярах), лежащим в плоскости CKA_1. Значит, прямая AB_1 перпендикулярна этой плоскости. Её проекцией на плоскость CKA_1 является точка O. Расстоянием между скрещивающимися прямыми CA_1 и AB_1 является длина перпендикуляра из точки O к прямой CA_1, длина отрезка OF.



AB = $\sqrt{65}$, CK = $\frac{4*7}{\sqrt{65}}$, AK = $\frac{16}{\sqrt{65}}$, KA_1 = $\frac{36}{\sqrt{65}}$, OA_1= $\frac{65}{81}$ KA_1 = $\frac{4\sqrt{65}}{9}$, FO = $\frac{CK*OA1}{CA1}$ = $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

Ответ: $\frac{14\sqrt{2}}{9}$

Дана четырехугольная пирамида *SABCD*, в основании которой лежит ромб *ABCD* со стороной 10. Известно, что $SB = 20$ и $SA = SC = 10\sqrt{2},\ AC = 10.$

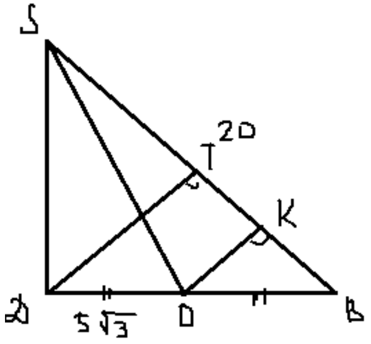
а) Докажите, что ребро *SD* перпендикулярно плоскости основания пирамиды *SABCD*.

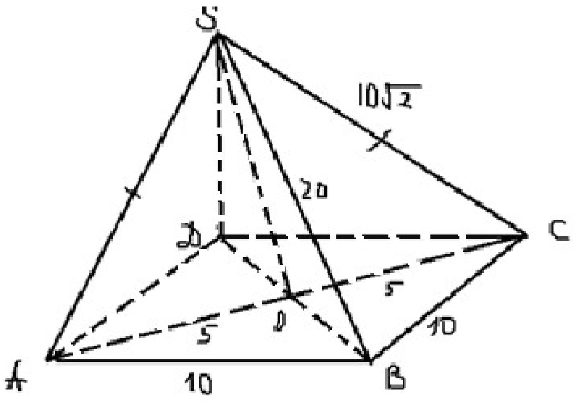
б) Найдите расстояние между прямыми *AC* и *SB*.

Решение.

а) Вторая диагональ ромба равна $10\sqrt{3}$. Δ SOC-прямоугольный, SO = $\sqrt{175}$. Δ *SOB:* по теореме косинусов cos B = $\sqrt{3}/2$, $\angle$ B = 30^0 Δ *SBD:* по теореме косинусов SD = 10. По теореме, обратной теореме Пифагора, устанавливаем $SC^2 = SD^2 + DC^2$, Δ *SCD* и Δ *SAD* (аналогично)- прямоугольные, ребро *SD* перпендикулярно плоскости основания пирамиды *SABCD.*

б) Прямые *AC* и *SB* скрещиваются, AC перпендикулярна плоскости *SBD, OK* – расстояние между ними. *TD* –высота к гипотенузе прямоугольного треугольника, *TD* = $5\sqrt{3}$, ОК- средняя линия Δ *TKD, OK* = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$





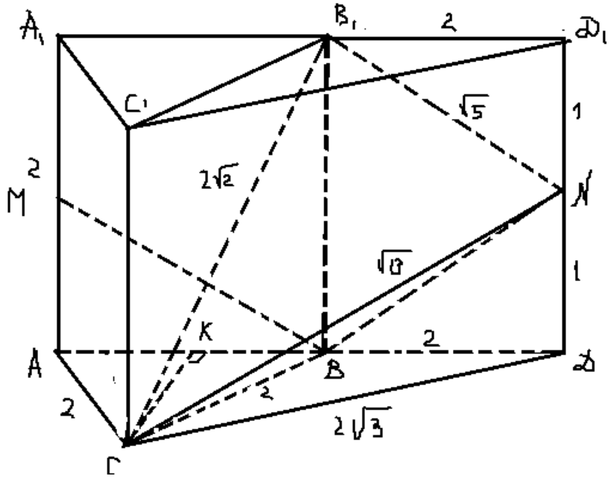
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

Решение.

а) Прямая CB_1 лежит в плоскости CC_1B_1, прямая MB пересекает эту плоскость в точке B, не лежащей на прямой CB_1, прямые BM и CB_1 скрещиваются. Грань AA_1B_1B при параллельном переносе переходит в грань B_1D_1DB. Перебором прямоугольных треугольников находим длины отрезков B_1N, B_1C, CD, CN. По теореме, обратной теореме Пифагора, устанавливаем, что $\Delta\, CB_1N$ прямоугольный с прямым углом CB_1N.



б) Расстоянием между прямыми MB и B_1C будет длина перпендикуляра из точки B прямой MB к параллельной плоскости CB_1N(назовем его H), в которой лежит другая прямая. С помощью объёма пирамиды BCB_1N находим длину этого перпендикуляра.

$V = 1/3\, S_{BB1} * CK = 1/3\, S_{CB1N} * H$, $H = \dfrac{3V}{SCB1N} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$

Ответ : $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$

КУРО
КОРПОРАТИВНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

ЦНППМ
ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО ПОВЫШЕНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

Спасибо за внимание!

При подготовке выступления использован сайт https://math-ege.sdamgia.ru

- Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2025 года по математике; И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И.Самсонов, А.В. Семенов
Microsoft Word - Математика _мр_2025.docx
- «Методические рекомендации обучающимся по организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ 2025 года» от ФИПИ
Microsoft Word - Математика-11.docx