Методические рекомендации по построению графиков функций и применению их для решения уравнений и неравенств

Задания части 2 ОГЭ направлены на проверку качеств математической подготовки:

- ✓уверенное владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом;
- ✓ умение решить комплексную задачу, включающую в себя знания из разных тем курса математики;
- ✓умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии;
- ✓ умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования;
- ✓владение широким спектром приёмов и способов рассуждений;
- ✓умение математически грамотно записать решение.

Требования к выполнению заданий второй части

- Решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося.
- Оформление решения должно обеспечивать выполнение требований спецификации, а в остальном может быть произвольным.
- Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов).
- Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Задания № 22 ОГЭ (алгебраическое) – задания высокого уровня сложности, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на обучающихся, изучавших математику более основательно, например, в рамках углубленного курса математики, элективных курсов в ходе предпрофильной подготовки, математических кружков и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении ученик должен продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера, которые помогут успешно продолжать образование в 10–11 классах углубленного или профильного изучения математики, информатики, физики.

Между тем, задания на построение графиков с модулями и выколотыми точками не такие уж и сложные. И, как показывает опыт, научиться строить такие графики, при его на то желании может не только ученик, претендующий на "пятёрку", но также и любой хорошист. Для этого нужно только желание научиться строить такие графики.

Для выполнения задания 22 необходимо уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели.

учитель будущего

Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую

Первое, что пугает учащегося – это дробь, второе – четвёртая степень

Алгоритм работы с заданием:

1) преобразуем формулу, которая задает функцию, и найдем область определения функции;
2) определим вид и характерные точки графика функции;
3) изобразим график функции на координатной плоскости с учётом области определения;
4) исследуем график функции, исходя из вопроса к заданию;
5) запишем ответ.

учитель будущего

Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c

прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Разложим числитель дроби на множители:

Для этого решим биквадратное уравнение, используя замену переменной $t=x^2$

Получим, $t^2-13t+36=0$, $D=169-144=25$, $t=(13+5):2=9$ или $t=(13-5):2=4$

$$x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

!!!!!!! Мы достаточно часто говорим учащимся, что сокращать на переменную не стоит, умножать тоже, но построение графика функции - это как раз тот случай, когда без сокращения дроби не обойтись.

!!!!!!! Самое важное – это не забыть про область определения и выколоть потом на графике неподходящие точки.

При $x\neq-2$ и $x\neq3$ функция принимает вид: $y=(x-2)(x+3)$ или $y=x^2+x-6$

её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2;-4)$ и $(3;6)$.

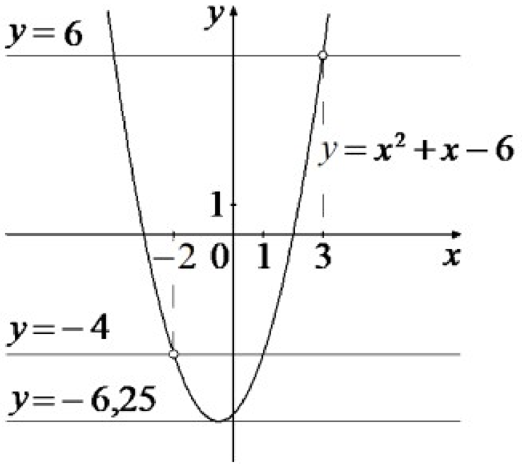
Теперь требуется грамотно построить параболу.

Необходимо минимум три точки.

!!!!!Обязательно – вершина параболы: x=-b/2a; x=-1/2, тогда y=-6,25

!!!!! Желательно – точки пересечения с осью x: корни квадратного уравнения: x=2 и x=-3

!!!!! Возможно – дополнительные точки. Например, пересечения с осью y. В данном случае y=-6.



Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0{,}5;-6{,}25)$.

Поэтому $c=-6{,}25$, $c=-4$ или $c=6$.

Ответ: $c=-6{,}25$, $c=-4$, $c=6$.

Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Комментарий. Основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика. Верное построение графика включает в себя: масштаб, содержательная таблица значений или объяснение построения, ***выколотая точка обозначена в соответствии с ее координатами****.*

Рекомендации по построению графика

Основные моменты, которые необходимо обратить внимание:

1) Даём описание функции (например, график - парабола).

2) При построение графиков элементарной функции указываем, как мы это делали.

Для прямой находим две точки (указываем в таблице);

Для гиперболы находим точки для обеих ветвей;

Для параболы находим вершину и дополнительные точки.

В случае, если ученик строит функцию, полученную сдвигом другой функции на n единиц по осям OX и OY необходимо прописать весь алгоритм построения.

3) При преобразовании дробно-рациональной функции необходимо прописать все выполненные преобразования, а также чему не равен x. Указываем координаты выколотых точек.

4) При построение графика указываем название и направление осей координат, начало координат, единичный отрезок, подписываем график.

Если функция кусочная:

1) Каждый отдельный кусочек строится по **тем же** требованиям: написать названия графиков, как они строились, какие были ограничения и как это повлияло на новый график.

2) Очень важно **просчитать точку стыка**! Её вычисления должны находиться в таблице или описании построения.

Рекомендации по нахождению ответа на вопрос задания

Основные моменты, которые необходимо обратить внимание:

1) Характеризуем прямую, которая дана во второй части задания.

2) Рассматриваем все значения параметра: прописываем как меняется количество общих точек графика и прямой в зависимости от него.

В ответ фиксируем значение, которое спрашивается в задании.

2) Постройте график функции $y = \frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Преобразуем выражение $\frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2} = \frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5|x|^2} = \frac{2,5|x|-1}{|x|\,(1-2,5|x|)} = -\frac{1}{|x|}$ при $x \neq -0,4$ и $0,4$.

График нашей функции сводится к графику функции $y = f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

с выколотыми точками (0,4; - 2,5) и (-0,4; - 2,5).

Привести вычисления для ординат выколотых точек

1) $y = -\frac{1}{x}$ при $x > 0$. Графиком является ветвь гиперболы в 4 координа

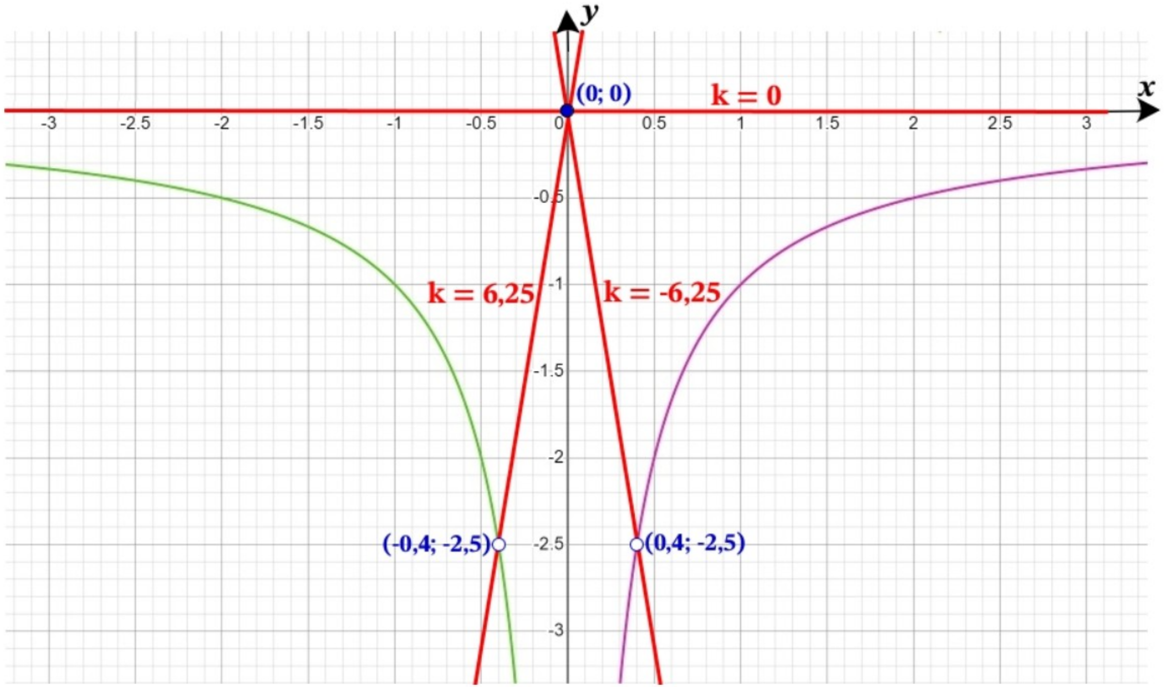
X	0,4	1	2
y	- 2,5	- 1	- 0,5

2) $y = \frac{1}{x}$ при $x < 0$. Графиком является ветвь гиперболы в 3 координатной четверти.

X	- 0,4	- 1	- 2
y	- 2,5	- 1	- 0,5

Алгоритм работы с заданием:

1) преобразуем формулу, которая задает функцию, и найдем область определения функции;
пределим вид и характерные
и графика функции;
зобразим график функции на
рдинатной плоскости с
учетом области определения;
4) исследуем график функции, исходя из вопроса к заданию;
5) запишем ответ.



учитель будущего

Прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек, если она горизонтальная (y = 0), либо проходит через одну из выколотых точек (0,4; - 2,5) и (-0,4; -2,5).

1) -2,5 = 0,4k, k = -6,25
2) -2,5 = - 0,4k, k = 6,25

Получаем k = -6,25; k = 0; k = 6,25
Ответ: -6,25; 0; 6,25.

учитель будущего

3) Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 3|$ и опреде
с графиком ровно три общие точки.

$$y = x^2 - |4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x - 3, \text{ если } x \geq -\frac{3}{4}; \\ x^2 + 4x + 3, \text{ если } x < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

1) Графиком функции $y = x^2 - 4x - 3$ является парабола, ветви
Пересекает ось ОУ в точке (0; -3).

X	- 3/4	1	3	4
y	9/16	-6	-6	-3

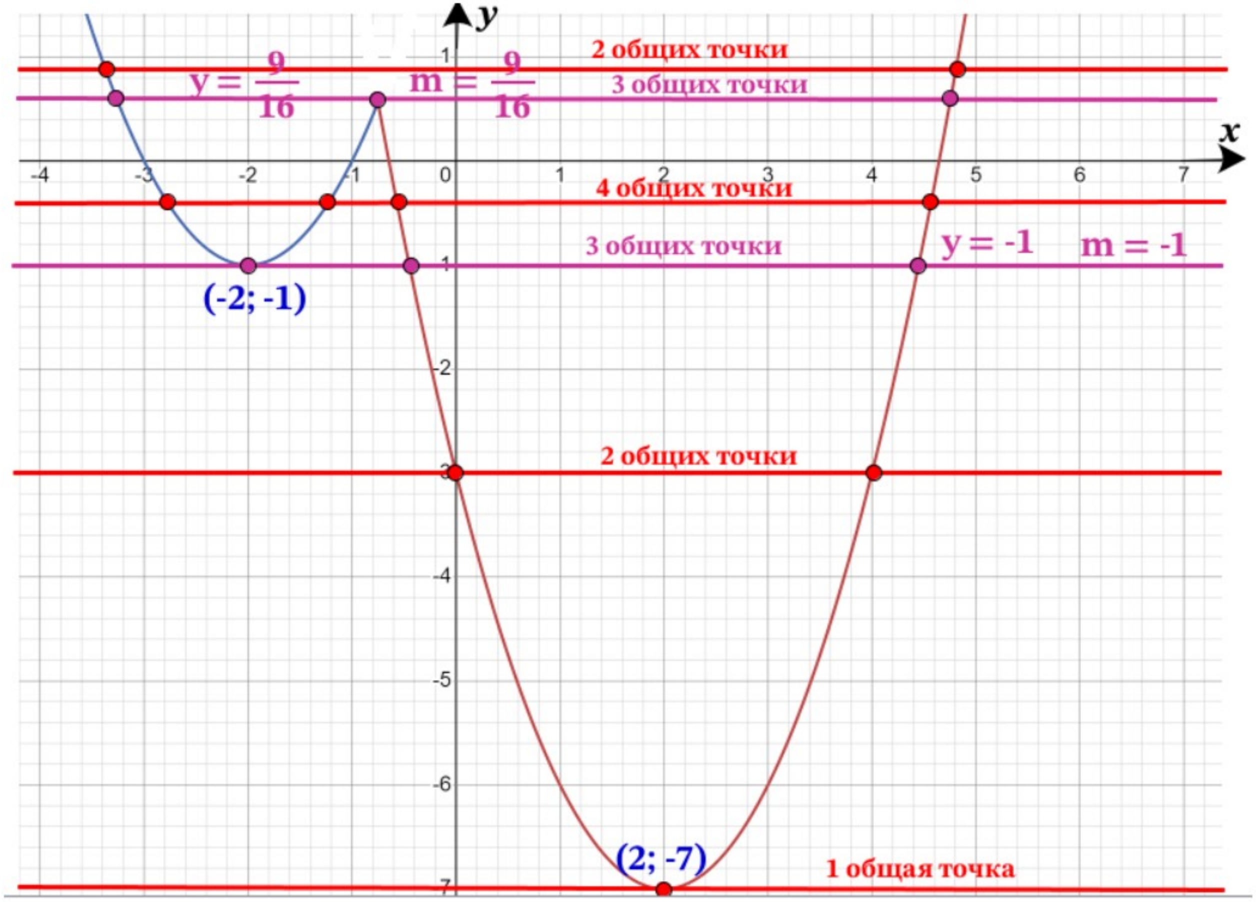
2) Графиком функции $y = x^2 + 4x +$
Пересекает ось ОУ в точке (0 в точках (-3;0) и (-1

X	-4	-3/4
y	3	9/16

Вершину параболы можно найти и прописать в таблице.

включается в обе
их частей графика.
помогательный
рения, она может
очки, которые не
вошли в интервал для данной части функции. Проверка граничной точки показывает, есть ли у функции разрыв.

учитель будущего



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки при $m = -1$ и $m = \frac{9}{16}$.

Ответ: -1; $\frac{9}{16}$.

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

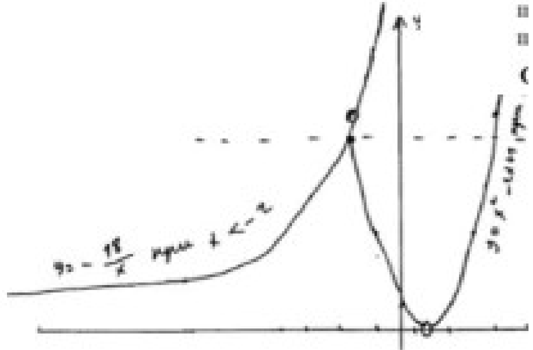
Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

23. $D(y): x \in (-\infty;0);(0;+\infty)$

$y = x^2-2x+1$
квадратичная функция
график – парабола
ветви вверх.
$x_в = \frac{2}{2} = 1$
$y_в = 1-2+1=0$

$y = -\frac{18}{x}$
график – гипербола

x	1	18	2	3	...
y	−18	−1	−9	−6	...



Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 9$ или $m=0$.
Ответ: 0; 9

? баллов

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

23 $D(y): x \in (-\infty;0);(0;+\infty)$.

$y = x^2 - 2x + 1$

квадратичная функция

график – парабола

ветви вверх.

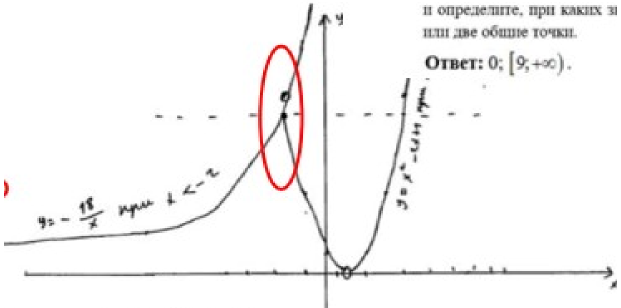
$x_в = \frac{2}{2} = 1$

$y_в = 1 - 2 + 1 = 0$

$y = -\frac{18}{x}$

график – гипербола.

x	1	18	2	9	...
y	−18	−1	−9	−2	...



Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 8$ или $m=0$.

Ответ: 0; 8

График функции построен неверно

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 1

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases}x^2-2x+1, & \text{если } x\geq -2,\\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

23) $y\begin{cases}x^2-2x+1 & (x\geq -2)\\ -\dfrac{18}{x} & (x<-2)\end{cases}$

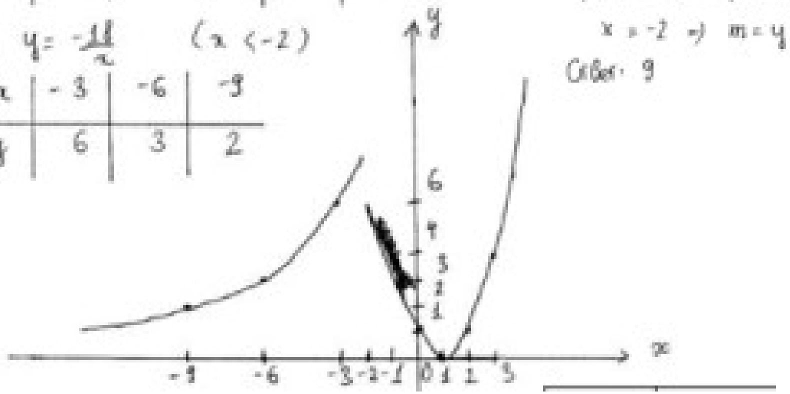
1) $y=x^2-2x+1 \quad (x\geq -2)$

$x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1 \Rightarrow y_0=1^2-2\cdot 1+1=1-2+1=0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

2) $y=-\dfrac{18}{x} \quad (x<-2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на графике.

При $x=-2$ прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки.

$x=-2 \Rightarrow m=y=9$

Ответ: 9

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 1

№ 22 с 2021 года

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x\ge -2,\\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

23 $y\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\geq -2)\\ -\dfrac{18}{x} & (x<-2)\end{cases}$

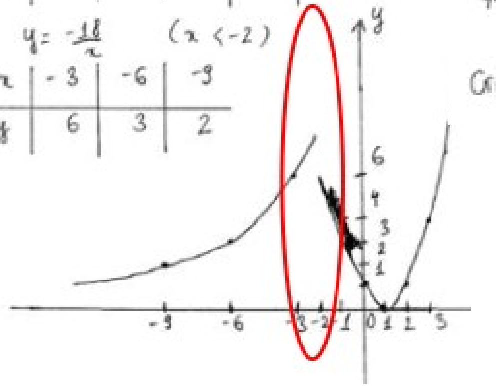
① $y = x^2-2x+1 \quad (x\geq -2)$

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 1-2+1 = 0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

② $y = -\dfrac{18}{x} \quad (x<-2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на график:

При $x = -2$ прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки

$x = -2 \Rightarrow m = y = 9$

Ответ: 9

Неверно построен график функции.
Исследование параметра не проведено.

0 баллов

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ ; при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \text{ ; при } x < -2 \end{cases}$$

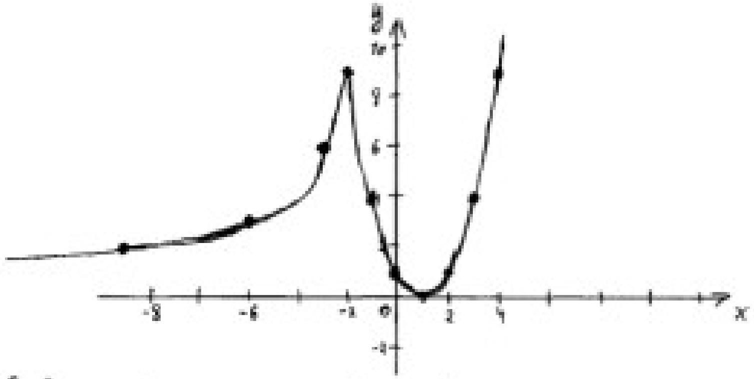
$-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \qquad y=1-2+1=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	[illegible]	[illegible]

$y=x^2-2x+1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3
y	2	3	6

$y=-\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m=0$ и $m \in [9;+\infty)$

23

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

? баллов

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1 \ ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \ ; \text{при } x < -2 \end{cases}$$

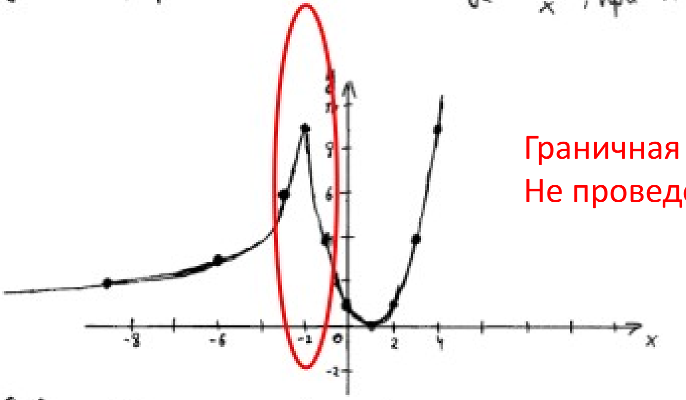
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = 1-2+1 = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y = x^2 - 2x + 1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3	[illegible]
y	2	3	6	[illegible]

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m = 0$ и $m \in [9; +\infty)$

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0; [9; +\infty)$.

Граничная точка во второй таблице отсутствует.

Не проведено исследование параметра.

? баллов

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k = 5$, $k = -4$, $k = 4$.

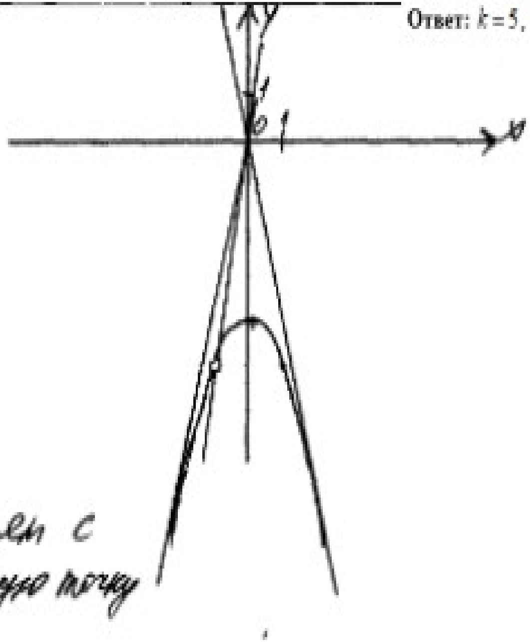
$$y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$$

$$y = \frac{-(x^2+4)(-x-1)}{-x-1}$$

$y = -(x^2+4)$, где $-x-1 \neq 0$

$y = -x^2-4$, где $x \neq -1$

квадр. функция; графикон парабола; ветви вниз, вершина $(0; -4)$



Ответ: прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $k = -4; 4; 5$

? баллов

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

$$y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$$

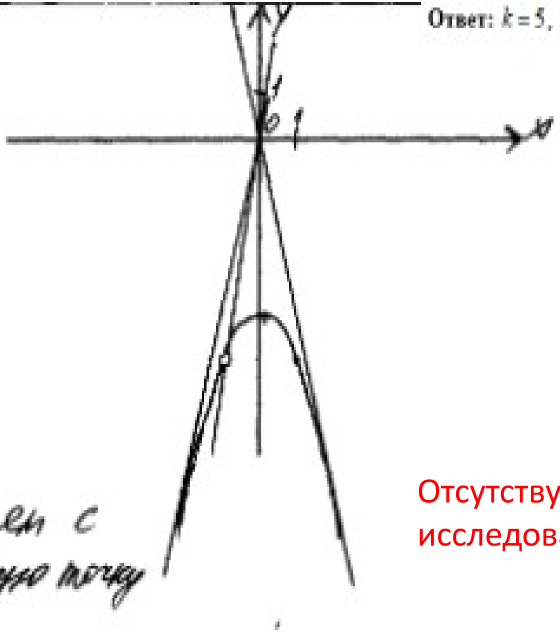
$$y=\frac{-(x^2+4)(-x-1)}{-x-1}$$

$y=-(x^2+4)$, где $-x-1\neq 0$

$y=-x^2-4$, где $x\neq -1$

квадр. функция; графика парабола; ветви вниз

вершина $(0;-4)$



Ответ: прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $k=-4; 4; 5$

Отсутствует описание построения параболы, исследования параметра.

0 баллов

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

учитель будущего